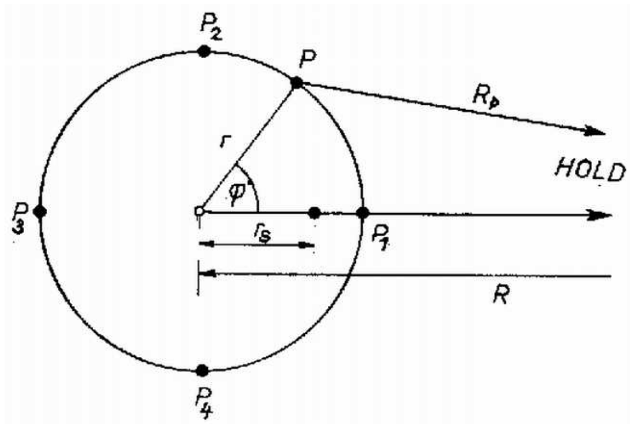
Az apály és a dagály (a tengereken észlelhető nagyjából szabályos vízszintváltozások) az inhomogén gravitációs tér következménye. A feladat tárgyalásához először tekintsük a Földet és a Holdat is pontszerűnek és a többi égitest gravitációs hatását hanyagoljuk el. Ebben az esetben Newton III. törvénye szerint a súlypont vagy nyugalomban van, vagy egyenes vonalú állandó sebességű mozgást végez. Mivel a mozgásegyenletek mindkét esetben ugyanolyan alakúak, így a súlypontot önkényesen állónak tekinthetjük. A két test ekkor vagy egymás felé mozogva a súlypontba tart, vagy a súlypont körül görbe vonalú mozgást végez. A Föld és Hold esetén ez utóbbi valósul meg, és pályájukat első közelítésben kör alakúnak vesszük. A körpályán maradáshoz szükséges centripetális erő a gravitációs erő.



A Föld mozgásegyenlete tehát (1. az ábrát):

$$m_F r_S \omega^2 = \gamma \frac{m_F \cdot m_H}{R^2}, \tag{1}$$

ahol m_F, m_H a Föld és Hold tömege, R a Föld–Hold távolság,r_S pedig a Föld távolsága a súlyponttól. A súlypont egyenlete

$$\frac{m_H}{m_F} = \frac{r_S}{R - r_S}, \tag{2}$$

Mi a következménye annak, hogy a Föld nem pontszerű? Az (1) egyenletet ekkor is felírhatjuk, de jelentése megváltozik. Ekkor szigorúan véve csak a súlypont mozgását írja le. A Föld igen nagy gravitációs ereje miatt a Föld merev testként viselkedik, hiszen valamennyi pontja lényegileg mozdulatlan a Földhöz képest, azaz a Földdel együtt mozog az (1) által meghatározott pályán. A Hold gravitációs ereje azonban a Holdtól való távolság függvényében más és más a Föld különböző pontjain, így nyilvánvalóan nem egyezhet meg mindenütt a körmozgáshoz szükséges centripetális erővel. Azonban tudjuk, hogy a merev test összes pontját az (1)-nek megfelelő körpályára kényszeríti, így a centripetális erő a környezet kényszererejének és a Hold gravitációs erejének eredője. Számoljuk ki ezt a kényszererőt, illetve a kényszererőnek megfelelő gyorsulást a Föld egy tetszőleges P pontjában. Az ábra alapján

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}_{gr} - \mathbf{a}_{cl}| &= \left\{ \frac{(\gamma m_H)^2}{R_P^4} + \frac{(\gamma m_H)^2}{R^4} - 2\frac{(\gamma m_H)^2}{R_P^2 \cdot R^2} \cdot \frac{R - r\cos\varphi}{R_P} \right\}^{1/2} = \\ &= \frac{\gamma m_H}{R^3} \cdot r\sqrt{3\cos^2\varphi + 1}. \end{aligned} \tag{3}$$

A számoláshoz felhasználtuk az

$$\frac{1}{1 - a\varepsilon + b\varepsilon^2} \approx 1 - a\varepsilon + (a^2 - b)\varepsilon^2; \quad (1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2)^{-1/2} \approx 1 - \frac{a}{2}\varepsilon + \left(\frac{3}{8}a^2 - \frac{b}{2}\right)\varepsilon^2$$

összefüggéseket, amelyek $\varepsilon \ll 1$ esetén ($\varepsilon = r/R$) jó közelítésnek számítanak. Célszerű az így kapott gyorsulást a Föld felszínéhez képest merőleges és érintőleges összetevőkre bontani:

$$a_\perp = \frac{\gamma m_H}{R^3} r(3\cos^2\varphi - 1), \quad a_\parallel = \frac{3\gamma m_H}{2R^3} r\sin 2\varphi. \tag{4}$$

A gyorsulás merőleges összetevője nyilván azt mutatja meg, hogy az alátámasztásból származó kényszer, azaz a Hold miatti súlyváltozás mekkora lesz a P pontban. Az árapály jelenséget az $a_\parallel$ komponens magyarázza. $a_\parallel$ azt mutatja meg, hogy a P pontra a környezetnek milyen erővel kell hatnia (vagy hogy a P pont hogyan hat a környezetre), hogy azt a megadott körpályára kényszerítse. Szilárd anyagok esetén kis oldalirányú elmozdulások esetén olyan nyíróerők ébrednek, amelyek képesek ezt az erőt kifejteni. Más a helyzet folyadékoknál. Tudjuk, hogy ha vizet tartalmazó edényt gyorsítunk, akkor az egyes folyadékelemek gyorsulásához szükséges erőt az adja, hogy a folyadékfelszín ferde lesz, és így az egymás mellett levő folyadékoszlopokra oldalirányú hidrosztatikai nyomás hat. Ugyanez történik a tengereknél is. Az $a_\parallel$-nak megfelelő erőt csak ferde felszín esetén tudja biztosítani a tenger. (4) szerint a P_1, P_2, P_3, P_4 pontok mindegyikében $a_\parallel = 0$; a P_1 ponttól a P_2 pont felé haladva végig pozitív, míg a P_2 ponttól a P_3 pont felé haladva végig negatív, azaz a vízszint a P_2 ponttól a P_1 és P_3 pont felé emelkedik: P_2-ben (és ugyanígy P_4-ben) apály van, P_1 és P_3 pontokban pedig dagály.

A Föld saját tengelye körüli forgása modellszámításunkat nem befolyásolja, aminek a következménye az, hogy a dagályok helyzetét mindig a Hold határozza meg: ezért a Föld saját tengelye körüli forgása során a dagályhullám végigvonul a Földön. Ezzel a jelenség kvalitatív leírását megadtuk. Egyszerűsítő feltevéseink miatt sok dagállyal kapcsolatos jelenségre nem tudunk választ adni. Ha a fenti számoláshoz hasonlóan a Nap hatását is kiszámolnánk, teljesebb lenne a képünk. Azt azonban, hogy a Föld különböző pontjain miért különbözik oly erősen a dagály nagysága, azt csak akkor érthetjük meg, hogyha a dagályhullám áramlási viszonyait tanulmányozzuk részletesen. Ez azonban rendkívüli bonyolult probléma.

Megjegyzés. A megoldások elbírálásánál 3 ponttal értékeltük az összes olyan helyes megoldást, amely valamilyen kézikönyv alapján készült. Kiemelkedőek azok a megoldások, amelyek részletesebb, lényegileg helyes számolásokkal kísérelték megoldani a problémát.