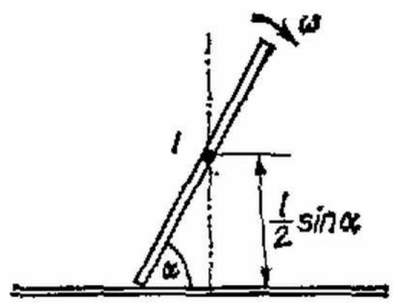
Az ábráról leolvasható a pálca helyzeti energiájának változása: $mg(l/2)(1-\sin\alpha)$, így v-vel a tömegközéppont sebességét, ω-val a forgás szögsebességét jelölve a mechanikai energia megmaradási egyenlete:

$$mg(l/2)(1-\sin\alpha)=(1/2)mv^2+(1/2)(1/12)ml^2\cdot\omega^2. \tag{1}$$

Ha súrlódás nincs, a rúdra ható erőknek nincs vízszintes komponensük. Ekkor a tömegközéppont vízszintesen nem mozdul el. Ezért v függőleges irányú és

$$v=\mathrm{d}h/\mathrm{d}t=\mathrm{d}\big[(l/2)\sin\alpha\big]/\mathrm{d}t=(l/2)\cos\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t.$$



Figyelembe véve, hogy α és ω irányítása ellentétes az ábrán: $\omega=-(\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t)$, tehát:

$$v=-(l/2)\omega\cdot\cos\alpha. \tag{2}$$

Ezt (1)-be helyettesítve kapjuk:

$$\omega^2=\frac{12g}{l}\cdot\frac{1-\sin\alpha}{1+3\cos^2\alpha}. \tag{3}$$

A szöggyorsulás $\beta=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$. Célszerűbb azonban a (3) kifejezés idő szerinti deriváltját képezni β kiszámításához.

$$2\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{12g}{l}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+3\cos^2\alpha}\right)=\frac{12g}{l}\frac{\cos\alpha}{1+3\cos^2\alpha}\left[1+\frac{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{1+3\cos^2\alpha}\right]\omega,$$

azaz

$$\beta=\frac{6g}{l}\frac{\cos\alpha}{1+3\cos^2\alpha}\left[1+\frac{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{1+3\cos^2\alpha}\right]. \tag{4}$$

A talaj elérésekor ($\alpha=0$) a rúd szögsebessége (3)-ból

$$\omega_1=\sqrt{\frac{3g}{l}} \tag{5}$$

Czuczor Lajos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Legtöbben akkor követtek el hibát, amikor azt feltételezték, hogy a tömegközéppont gyorsulása és a szöggyorsulás között a (2)-höz hasonló $\alpha=-(l/2)\cos\beta$ egyenlet áll fenn. A sebességek és a gyorsulások közti kényszerkapcsolatok általában csak akkor azonos alakúak, ha a sebesség és a szögsebesség között állandó együtthatós lineáris kapcsolat van. Esetünkben viszont α függ az időtől. A gyorsulásokra vonatkozó feltételt (2) deriválásával nyerjük:

$$\alpha=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=(l/2)(\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t)\cdot\omega\sin\alpha-(l/2)(\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t)\cos\alpha=-(l/2)\omega^2\sin\alpha-(l/2)\beta\cos\alpha.$$