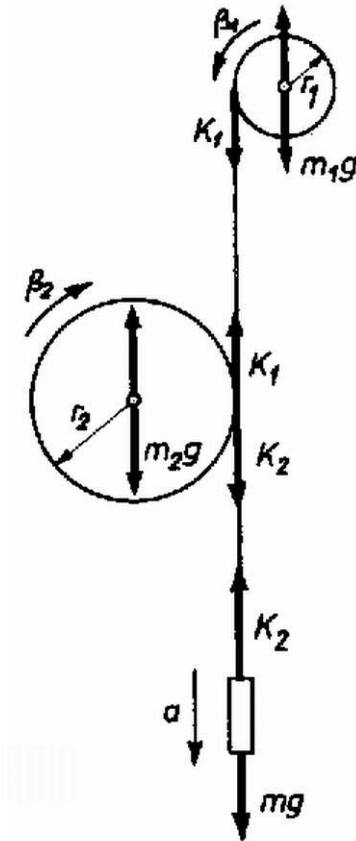


I. megoldás. Használjuk az 1447. feladat megoldásának jelöléseit (l. az 1. ábrát)! Az egyes testek mozgásegyenlete ugyanaz, mint az 1447. feladatban:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & ma = mg - K_2, \\
 (2) \quad & [(1/2)m_1 r_1^2] \beta_1 = K_1 r_1, \\
 (3) \quad & [(1/2)m_2 r_2^2] \beta_2 = S r_2 = (K_2 - K_1) r_2,
 \end{aligned}$$

és továbbra is fennáll az a és a β_1 közötti, a kötélnyújthatatlanságából eredő összefüggés:

$$(4) \quad a = r_1 \beta_1.$$



1. ábra

A súrlódási együttható értékétől függően két eset lehetséges: a kötélnyújthatatlanság, vagy csúszik rajta. Vizsgáljuk az utóbbi esetet! Ekkor

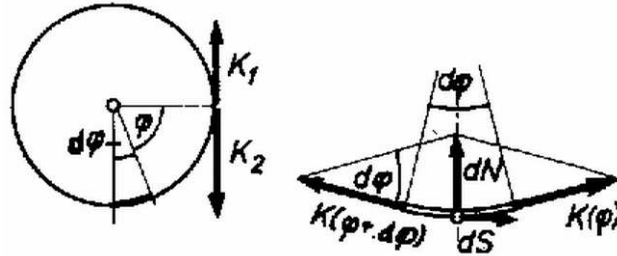
$$(5) \quad a \geq r_2 \beta_2,$$

tehát még egy egyenletre van szükségünk. Tekintsük a kötélnyújthatatlanság egy kis $d\varphi$ középponti szöghöz tartozó darabját (2. ábra)! A kötéldarab végeinél ható erők nagyságát jelöljük $K(\varphi)$, ill. $K(\varphi + d\varphi)$ -vel! Az ábráról leolvasható, hogy a kötéldarab

$$(6) \quad dN \cong K(\varphi)d\varphi$$

nagyságú erővel nyomja a hengert. Mivel a kötélen csúszik,

$$(7) \quad dS = \mu dN.$$



2. ábra

A súlytalan kötélrabra ható erőknek ki kell egyensúlyozniuk egymást, különben a gyorsulás végtelenül nagy lenne, ezért

$$(8) \quad K(\varphi + d\varphi) - K(\varphi) = ds,$$

azaz

$$(9) \quad K(\varphi + d\varphi) - K(\varphi) = \mu K(\varphi)d\varphi.$$

A (6), (8) és (9) összefüggések közelítőek, annál pontosabbak, minél kisebb a $d\varphi$. A $d\varphi \rightarrow 0$ határátmenettel (9)-ből a

$$(10) \quad \frac{dK(\varphi)}{d\varphi} = \mu K(\varphi)$$

differenciálegyenletet kapjuk. Rendezzük át az egyenletet, és integráljuk mindkét oldalt φ_1, φ_2 határok között:

$$(11) \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{dK(\varphi)}{K(\varphi)} = \mu \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi;$$

$$\ln \frac{K(\varphi_2)}{K(\varphi_1)} = \mu(\varphi_2 - \varphi_1).$$

$$(12) \quad K(\varphi_2) = K(\varphi_1) \cdot e^{\mu(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Felhasználva, hogy $K(0) = K_1$; $K(2\pi) = K_2$, (12)-ből $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$ helyettesítéssel nyerjük:

$$(13a) \quad K(\varphi) = K_1 \cdot e^{\mu\varphi},$$

$$(13b) \quad K_2 = K_1 \cdot e^{2\pi\mu}.$$

Ezzel megkaptuk (10)-nek azt a megoldását, amely kielégíti a $K(0) = K_1$ kezdeti feltételt (vö. a januári számban kitűzött 1479. feladattal). Az (1) – (4) egyenletrendszer a (13b) egyenlet teszi teljessé. A megoldás:

$$(14) \quad \begin{aligned} a &= g \cdot \frac{2m}{2m + m_1 c}; \\ \beta_1 &= \frac{g}{r_1} \cdot \frac{2m}{2m + m_1 c}; \\ K_1 &= mg \cdot \frac{m_1}{2m + m_1 c}; \\ K_2 &= mg \cdot \frac{m_1}{2m + m_1 c} \cdot c; \\ \beta_2 &= \frac{g}{r_2} \cdot \frac{2m}{2m + m_1 c} \cdot \frac{m_1}{m_2} (c - 1); \quad c = e^{2\pi\mu}. \end{aligned}$$

Ez a megoldás akkor helyes, azaz a kötélen akkor csúszik valóban a hengeren, ha (5) teljesül. Ez a feltétel (14) behelyettesítésével a

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{m_1}{m_2}(c-1) &\leq 1, \\ \mu &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \frac{m_1 + m_2}{m_1} \end{aligned}$$

alakra hozható. Ha μ a jobb oldalon álló értéknél nagyobb, a kötélen nem tud megcsúszni a hengeren. Ebben az esetben (10) és (13b) nem igaz, de (5)-ben az egyenlőség teljesül, és ez adja az ötödik egyenletet. A keresett mennyiségek ebben az esetben

$$\begin{aligned} a &= g \frac{2m}{2m + m_1 + m_2}; & \beta_1 &= \frac{g}{r_1} \frac{2m}{2m + m_1 + m_2}; \\ \beta_2 &= \frac{g}{r_2} \cdot \frac{2m}{2m + m_1 + m_2}; & K_1 &= m_1 g \frac{m}{2m + m_1 + m_2}; \end{aligned}$$

$$K_2 = mg \cdot \frac{m_1 + m_2}{2m + m_1 + m_2}.$$

Czuczor Lajos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.) és
Bene Gyula (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján

II. megoldás. A K_1 és a K_2 közötti összefüggés a következő úton is megkapható: a kötélnak a hengerre tekeredő részét n egyenlő részre osztva, az i -edik darabra (9) alapján

$$(16) \quad K\left(i \frac{2\pi}{n}\right) - K\left[(i-1) \frac{2\pi}{n}\right] = \mu \frac{2\pi}{n} \cdot K\left[(i-1) \frac{2\pi}{n}\right],$$

azaz

$$(17) \quad K\left(i \frac{2\pi}{n}\right) = \left(1 + \frac{\mu 2\pi}{n}\right) K\left[(i-1) \frac{2\pi}{n}\right] = \left(1 + \frac{\mu 2\pi}{n}\right)^i K(0),$$

ahonnan

$$(18) \quad K_2 = K_1 \left(1 + \frac{\mu 2\pi}{n}\right)^n.$$

Ez az egyenlőség annál pontosabb, minél nagyobb n .

A felosztást finomítva megkapjuk (13b)-t:

$$(19) \quad K_2 = K_1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2\pi\mu}{n}\right)^n = K_1 \cdot e^{2\pi\mu}.$$

Kilián Imre (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., IV. o. t.)