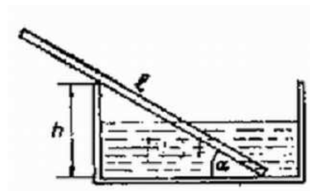
A pálcára az ábrán látható erők hatnak. A megmozdulás pillanatáig a pálcára ható erők vízszintes, ill. függőleges összetevőinek eredője nulla:

$$S_2 \cos\alpha + S_1 - N_2 \sin\alpha = 0, \tag{1}$$

$$G - F - N_1 - N_2 \cos\alpha - S_2 \sin\alpha = 0. \tag{2}$$



Az erők forgatónyomatékára vonatkozó egyenlet a pálca két végpontjára:

$$G\big[h \text{ ctg } \alpha - (l/2)\cos\alpha\big] - F\big[h \text{ ctg } \alpha - (x/2) \text{ ctg } \alpha\big] - N_1 h \text{ ctg } \alpha + S_1 h = 0, \tag{3}$$

$$G(l/2)\cos\alpha - F(x/2) \text{ ctg } \alpha - N_2 h/\sin\alpha = 0. \tag{3'}$$

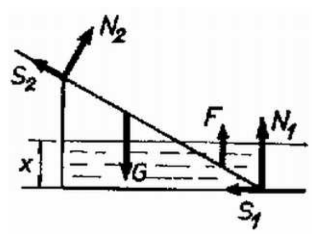
A pálca súlya $G = lA\varrho_{\text{pálca}}\, g$, a felhajtóerő $F = (x/\sin\alpha)A\varrho_{\text{víz}}\, g$ (A a pálca keresztmetszetének területe). A-t kiküszöbölve

$$F = \frac{x}{l\sin\alpha} rG, \tag{4}$$

ahol

$$r = \frac{\varrho_{\text{viz}}}{\varrho_{\text{pálca}}}.$$

A pálca kétféleképpen mozdulhat meg: 1. a pálca az edény aljára támaszkodó vége felemelkedik, 2. a pálca megcsúszik. Foglalkozzunk először az első esettel.



1. A felemelkedés pillanatában $N_1 = 0$ és $S_1 = 0$, $S_2 \leqq \mu N_2$. Az utóbbi feltétel alapján (1)-ből

$$S_2 = N_2 \text{ tg } \alpha \leqq \mu N_2.$$

Ezért az 1. eset megvalósulásához szükséges feltétel:

$$\mu \geqq \text{tg } \alpha. \tag{5}$$

A pálca megmozdulásához szükséges vízmagasságot az (1)–(4) egyenletrendszer megoldásával határozhatjuk meg $N_1 = S_1 = 0$ behelyettesítésével. Másodfokú egyenletre jutunk, amelynek gyökei

$$x_{1,2} = h \pm \sqrt{h^2 - (l/r)(2h - l\sin\alpha)\sin\alpha}.$$

A két gyök közül az

$$x_1 = h - \sqrt{h^2 - (l/r)(2h - l\sin\alpha)\sin\alpha} \tag{6}$$

a fizikailag érdekes, mivel $x_1 < x < h$ esetén x-et növelve F gyorsabban nő, mint ahogy az edény peremére vonatkozó karja csökken, tehát bármely x_1 és h közé eső vízmagasságra felemelkedik a pálca.

Ha a diszkrimináns negatív, a pálca egyáltalán nem mozdul meg. Ez akkor áll fenn, ha

$$\varrho_{\text{pálca}} > \varrho_{\text{víz}} \frac{h^2}{l(2h - l\sin\alpha)\sin\alpha}. \tag{7}$$

2. $\mu < \mathrm{tg}\ \alpha$ esetén az I. eset nem valósulhat meg, ekkor a pálca lecsúszhat. A határesetben $S_1 = \mu N_1$ és $S_2 = \mu N_2$, ezeket behelyettesítve az (1)–(4) egyenletrendszerbe, a megmozduláshoz szükséges vízmagasság meghatározható. [Célszerű most a ($3'$) forgatónyomaték egyenletet használni.] x-re most is másodfokú egyenlet adódik, amelynek két gyöke közé eső vízmagasság esetén mozdulhat meg a pálca. Ez azt jelenti, hogy a kisebb gyök a fizikailag érdekes, mégpedig

$$x_1 = \frac{h}{\left[\mu + (1/\mu)\right]\sin\alpha\cos\alpha} - \tag{8}$$
$$-\sqrt{\left[\frac{h}{\left[\mu + (1/\mu)\right]\sin\alpha\cos\alpha}\right]^2 - \frac{2hl}{\left[\mu + (1/\mu)\right]r\cos\alpha} + \frac{l^2\sin^2\alpha}{r}}.$$

Megcsúszásról csak akkor beszélhetünk, ha $N_1 \geq 0$ és $N_2 \geq 0$. Az egyenletrendszerből

$$N_2 = \frac{G - F}{\left[\mu + (1/\mu)\right]\sin\alpha},$$
$$N_1 = N_2\left[(1/\mu)\sin\alpha - \cos\alpha\right].$$

$\mu = \mathrm{tg}\ \alpha$ esetén $(1/\mu)\sin\alpha - \cos\alpha > 0$, így N_1 és N_2 akkor lesz nemnegatív, ha $G \geq F$, ahonnan (4) felhasználásával a megcsúszás szükséges feltétele;

$$x \leq \frac{l\sin\alpha}{r}.$$

Ezek alapján nem nehéz belátni, hogy a megcsúszás pontosan akkor következik be, ha a (8) alatti x_1 értékre az

$$x_1 < \frac{l\sin\alpha}{r} \tag{9}$$

feltétel teljesül, éspedig a pálca az x_1 vízmagasság túllépése után csúszik meg.

A pálca víz beeresztése nélkül is lecsúszik, ha $x_1 < 0$. Ez akkor teljesül, ha (8)-ban a négyzetgyök alatti utolsó két tag összege pozitív. Innen a – közvetlenül is belátható

$$\mu + \frac{1}{\mu} > \frac{h}{\sin\alpha}\ \frac{4}{l\sin 2\alpha} \tag{10}$$

egyenlőtlenség adódik, μ-re felső korlátot ad.

Nem csúszik le a pálca, ha $x_1 > h$, vagy ha (8)-ban a négyzetgyök alatti kifejezés negatív.

Vizsgáljuk meg, mi történik a feladatban megadott számpéldák esetén. (Sajnálatos elírás következtében a feladat szövege $l = 20$ cm-es adattal jelent meg, ilyen adattal az ábra szerinti elrendezés nem valósulhat meg. Használjuk most az $l = 30$ cm-es adatot.) $\mathrm{tg}\ \alpha = 1/\sqrt{3} \approx 0{,}58$, így $\mu = 0{,}6$ esetén a pálca felemelkedik. $\mu = 0{,}4$ és 0,2 esetén lecsúszik.

a) $\mu = 0{,}6$ súrlódási együttható esetén a pálca felemelkedik. A megmozduláshoz szükséges vízmagasság (6)-ból

$$x_1 \approx 4{,}1\ \text{ cm}.$$

Nem emelkedne fel a pálca, ha sűrűsége túl nagy lenne. (7) alapján ennek feltétele

$$\varrho_{\text{pálca}} > 1{,}07\varrho_{\text{víz}}.$$

A pálca víz nélkül is lecsúszik, ha (10)-ből

$$\mu + (1/\mu) > 3{,}7,$$

ahonnan a fizikailag reális tartomány

$$\mu < 0{,}29.$$

A *c)* esetben ($\mu = 0{,}2$) tehát a pálca a víz beengedése előtt sem marad nyugalomban.

A *b)* esetben ($\mu = 0{,}4$) (8) alapján a pálca akkor csúszik meg, ha a víz mélysége nagyobb, mint

$$x_1 = 1{,}4\ \text{cm},$$

erre ui. teljesül a (9) feltétel:

$$x_1 < 9\ \text{cm}.$$

Megjegyzés. A hibás számadat következtében többen más adatokat használtak, illetve csak algebrailag számoltak. Ezeket a dolgozatokat helyesnek fogadtuk el. Mások az ábra elrendezését változtatták meg úgy, hogy a pálca nem az oldalfal tetejére, hanem belső oldalára támaszkodott. Mivel ekkor az eredmény taglalása lényegesen egyszerűbb, az ilyen – egyébként hibátlan – dolgozatok 3 pontot kaptak.