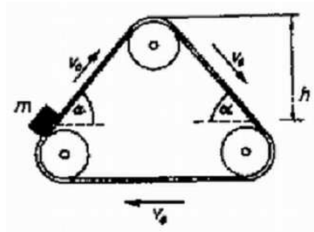
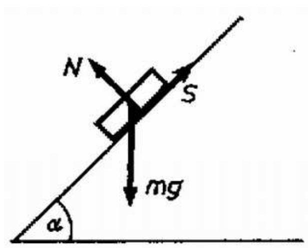


A lejtőre helyezett testre a nehézségi erő (mg), a lejtő nyomóereje (N) és a súrlódási erő (S) hat (1. ábra). A test mozgásegyenletei (a gyorsulás nagysága a_1, iránya a lejtővel párhuzamos, a lejtőn felfelé mutat):

$$ma_1 = S - mg\sin\alpha,$$
$$0 = N - mg\cos\alpha.$$

Mivel kezdetben a test sebessége nulla, a szalagé v_0, a test csúszik a szalagon, azaz

$$S = \mu N.$$



1. ábra

Ahhoz, hogy a test feljusson a lejtőn, az kell, hogy gyorsulása pozitív előjelű legyen, vagyis a fenti egyenletekből kifejezve

$$a_1 = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) > 0,$$

átalakítva

$$\mu > \mathrm{tg}\ \alpha$$

legyen. Ha ez a feltétel teljesül, a mozgás lefolyását háromféleképpen képzelhetjük el:

I. eset: a test még a bal oldali (1.) lejtőn eléri a v_0 sebességet;

II. eset: a test a jobb oldali (2.) lejtőn éri el a v_0 sebességet;

III. eset: a test nem éri el a v_0 sebességet.

Vizsgáljuk meg az egyes lehetőségeket:

I. eset, 1. lejtő: A test gyorsulása:

$$a_1 = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha),$$

a v_0 sebesség eléréséig megtett út:

$$s_1 = \frac{v_0^2}{2a_1} = \frac{v_0^2}{2g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

A lejtő hossza: $s = h/\sin\alpha$. A lejtő tetejére

$$t_1 = \frac{v_0}{a_1} + \frac{s - s_1}{v_0} = \frac{v_0}{2a_1} + \frac{s}{v_0}$$

idő alatt ér fel a test.

A lejtő a gyorsulás idején v_0/a_1 ideig $v_0 \cdot S$ teljesítményt adott le, majd utána $s - s_1$ úton $F = mg\sin\alpha$ erőt fejtett ki, így a lejtő munkavégzése az 1. szakaszon:

$$W_1 = \frac{v_0}{a_1}v_0 \cdot S + (s - s_1)F = \frac{v_0^2\mu mg\cos\alpha}{g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)} + sF - \frac{v_0^2 mg\sin\alpha}{2g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)} =$$

$$= sF + \frac{v_0^2 m(2\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{2(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

2. lejtő: Mivel $\mu > \mathrm{tg}\,\alpha$, a test a lejtővel együtt mozog. A lejutás ideje $t_2 = s/v_0$, a munkavégzés pedig $W_2 = -sF$.

Az I. esetben tehát a mozgás teljes ideje

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{2a_1} + \frac{2s}{v_0} = \frac{v_0}{2g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)} + \frac{2h}{v_0 \sin\alpha},$$

a végzett munka pedig:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{v_0^2 m(2\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{2(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

Az I. eset megvalósulásának feltétele: $s_1 < s$, képleteinket behelyettesítve és v_0-t kifejezve:

$$v_0 < \sqrt{2gh(\mu\mathrm{ctg}\,\alpha - 1)}.$$

II. és III. eset, 1. lejtő: A test végig a_1 gyorsulással gyorsul, így $v_1 = \sqrt{2a_1 s}$ sebességre gyorsul fel. A szükséges idő: $t_1 = v_1/a_1$.

A munkavégzést a fentiekhez hasonlóan számíthatjuk:

$$W_1 = t_1\, v_0 \mu\, mg \cos\alpha.$$

II. eset, 2. lejtő: Amíg a test gyorsul, addig F és S egy irányba mutat, így a test gyorsulása:

$$a_2 = \frac{F+S}{m} = g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha),$$

a gyorsulás ideje:

$$t' = \frac{v_0 - v_1}{a_2},$$

a felgyorsuláshoz szükséges út:

$$s_2 = v_1 t' + \frac{a_2}{2}(t')^2 = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2a_2}.$$

A lejtő aljára a test

$$t_2 = t' + \frac{s - s_2}{v_0}$$

idő alatt ér le.

A végzett munkát hasonlóan számíthatjuk, mint az I. eset 1. lejtőnél:

$$W_2 = t' v_0 S - (s - s_2)F.$$

Így a II. esetben az összes idő $t = t_1 + t_2$, ahová összefüggéseinket beírva a következőt kapjuk:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g\sin\alpha(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}} + \frac{v_0 - \sqrt{\dfrac{2gh(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{\sin\alpha}}}{g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)} + \\ + \frac{4gh\mu\cos\alpha - v_0^2\sin\alpha}{2g\sin\alpha \cdot v_0(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}.$$

Hasonlóan kapjuk az összes munkavégzést:

$$W = \mu m\cos\alpha \cdot v_0 \left(\sqrt{\frac{2gh}{\sin\alpha(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}} + \frac{v_0 - \sqrt{\dfrac{2gh(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{\sin\alpha}}}{\mu\cos\alpha + \sin\alpha} \right) - \\ - m\frac{4gh\cos\alpha - v_0^2\sin\alpha}{2(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}.$$

III. eset, 2. lejtő: Itt a test végig a_2 gyorsulással gyorsul, a mozgás idejét az $s = v_1 t_2 + (a_2/2)t_2^2$ összefüggésből számolhatjuk ki:

$$t_2 = \frac{\sqrt{v_1^2 + 2a_2 s} - v_1}{a_2}.$$

A végzett munka: $W_2 = t_2 v_0 S$.

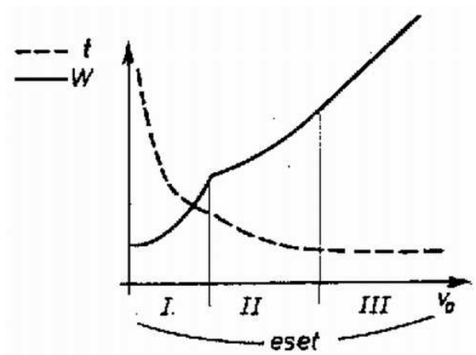
A III. esetben az összes idő:

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g\sin\alpha(\mu\cos\alpha-\sin\alpha)}}+\frac{\sqrt{\dfrac{4gh\mu\cos\alpha}{\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{2gh(\mu\cos\alpha-\sin\alpha)}{\sin\alpha}}}{g(\mu\cos\alpha+\sin\alpha)}.$$

Az összes munka:

$$W=\mu m v_0\cos\alpha\left(\sqrt{\frac{2gh}{\sin\alpha(\mu\cos\alpha-\sin\alpha)}}+\frac{\sqrt{\dfrac{4gh\mu\cos\alpha}{\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{2gh(\mu\cos\alpha-\sin\alpha)}{\sin\alpha}}}{\mu\cos\alpha+\sin\alpha}\right).$$

A feladatban megadott rendszerben a legkönnyebben v_0 változtatható, ezért az eredményeinket v_0 függvényében ábrázoljuk sematikusan (2. ábra).



2. ábra

Pálinkás István (Szolnok, Verseghy F. Gimn., II. o. t.)