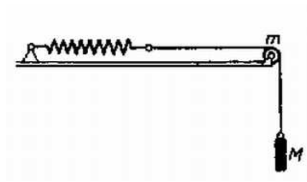
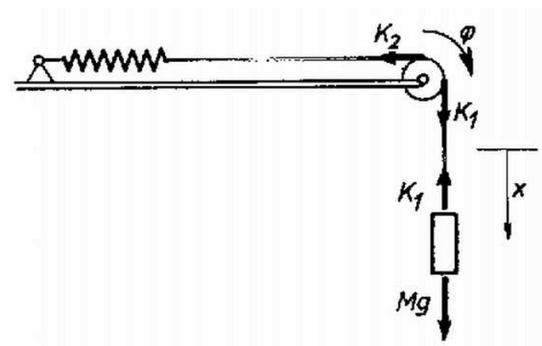


A kötél végére M tömegű testet akasztva egyensúlyban a rugó l_0 hosszal nyúlik meg:

(1) $$l_0 = Mg/D.$$

A feladatban leírt kezdeti helyzet után létrejövő mozgásnál a test x kitérését és a csiga φ szögelfordulását célszerű ettől a nyugalmi helyzettől mérni.



Az ábra alapján írjuk fel a mozgásegyenleteket:

(2) $$Mg - K_1 = Ma.$$
(3) $$(K_1 - K_2)r = \Theta\beta,$$

ahol a csiga tehetetlenségi nyomatéka

(4) $$\Theta = (1/2)mr^2.$$

A rugóra vonatkozó erőtörvény szerint

(5) $$K_2 = D(l_0 + x).$$

Mivel a kötél nyújthatatlan és a csigán nem csúszik meg, az x elmozdulás és a φ szögelfordulás közti kényszerfeltétel:

(6) $$r\varphi = x,$$

illetve a megfelelő gyorsulásokra:

(7) $$r\beta = a.$$

A mozgás leírásához célszerű az (1) – (7) egyenleteket átrendezni. A (2) és (3) egyenletet összeadva

$$Mg - K_2 = Ma + (\Theta/r)\beta,$$

majd K_2, β, l_0 és Θ értékét az (5), (7), (1) és (4) egyenletekből behelyettesítve:

(8) $$-Dx = [M + (1/2)m]a.$$

Az így nyert összefüggés egy $M + (1/2)m$ effektív tömegű harmonikus oszcillátor mozgásegyenlete. A kötélen lógó test tehát

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{M + (1/2)m}}$$

körfrekvenciájú rezgőmozgást végez. Az x kitérés időfüggése:

(9) $$x = h\cos\sqrt{\frac{D}{M + (1/2)m}}\,t,$$

ahol az amplitúdó és a fázis meghatározásánál felhasználtuk, hogy a $t = 0$ pillanatban az elengedett test kitérése $x(t = 0) = h$ volt. A (6) összefüggés alapján a csiga mozgását a

$$\varphi = \frac{h}{r} \cos \sqrt{\frac{D}{M + (1/2)m}}\, t \tag{10}$$

egyenlet írja le.

Vizsgáljuk meg a fenti megoldás érvényességi határát! A kötél nem adhat át nyomóerőt, ezért ha a (2) – (7) egyenleteket a teljes mozgásra kívánjuk alkalmazni, teljesülnie kell a $K_1 \geq 0$ és a $K_2 \geq 0$ feltételeknek. Az első egyenlőtlenség (2) alapján a gyorsulásra jelent megszorítást:

$$a \leq g, \tag{11}$$

míg a második a kitérésre:

$$x \geq -l_0. \tag{12}$$

A maximális gyorsulás: $a_{\max} = h \dfrac{D}{M + (1/2)m}$. A kitérés a $-h \leq x \leq h$ határok között változik. A (11) és (12) egyenlőtlenségek fennállásához ezért a

$$h \frac{D}{M + (1/2)m} \leq g, \tag{13}$$

$$h \leq l_0 = Mg/D \tag{14}$$

összefüggéseknek kell teljesülniük. Ezek közül a (14) feltétel a szigorúbb; teljes periódusú harmonikus rezgőmozgást csak akkor végez a test, ha az elengedés pillanatában a nyugalmi állapottól mért lehúzás értéke nem nagyobb, mint Mg/D.

Ha $h > Mg/D$, a (12) egyenlőtlenség alapján a test és a csiga mozgását a harmonikus rezgőmozgás (9) és (10) egyenletei csak a

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \arccos \left\{ -\frac{l_0}{h} \right\} = \sqrt{\frac{M + (1/2)m}{D}} \arccos \left\{ -\frac{Mg}{Dh} \right\}$$

időpillanatig írják le. Ekkor a kötelek meglazulnak, az M tömegű test $v_0 = -l_0\, \omega \sin \omega t_0$ kezdősebességű függőleges hajítás pályáján mozog, a csiga v_0/r szögsebességgel egyenletesen forog tovább (kötélerők hiányában a kötél nem tapadhat a csigára), az idealizált nulla tömegű rugó pedig állva marad.

$t' = 2v_0/g$ idő elteltével a test ellenkező irányú sebességgel érkezik az $x = -l_0$ ponthoz, a csiga forgásiránya azonban nem változik meg. Amint $x > -l_0$, az ébredő kötélerők rászorítják a kötelet a csigára és a súrlódási erő ellen munkát végeznek, mindaddig, amíg (a csiga forgásirányát, szögsebességét megváltoztatva) teljesül a (7) kényszerfeltétel.

Ha az elengedés pillanatában $h > Mg/D$, a létrejövő mozgás nem lesz periodikus. A mozgás közben lesznek olyan szakaszok, amikor a súrlódási erő ellen dolgozva a rendszer mechanikai energiája csökken. Így bizonyos idő elteltével a kitérés értéke az $-l_0 \leq x \leq l_0$ intervallumba kerül, és ettől kezdve a test és a csiga már ω körfrekvenciájú rezgőmozgást végez.

Dóra Csaba (Törökszentmiklós, Bercsényi M. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján