Az ellipszis pályán keringő űrhajó mechanikai energiája

$$E=-\gamma\frac{Mm}{r}+\frac{1}{2}mv^2, \tag{1}$$

ahol M a Föld tömege, m az űrhajóé, v pedig az űrhajó pillanatnyi sebessége r távolságra a Föld középpontjától. (A helyzeti energiát úgy vettük fel, hogy a végtelenben legyen nulla.) Eszerint az űrhajó mechanikai energiája arányos a tömegével. Ha a feladatnak megfelelően üzemanyag elégetés miatt az űrhajó tömege valamilyen mértékben csökken, akkor fog E is ugyanolyan mértékben változni, ha az

$$E/m=(1/2)v^2-\gamma M/r \tag{2}$$

kifejezés állandó marad. Tegyük fel, hogy a pályamódosítás ideje lényegesen rövidebb a keringési időnél, ekkor a pályamódosítás miatt r elhanyagolható mértékben változik, így v^2 sem változhat. Ezt csak úgy lehet elérni, hogy csak a sebesség irányát változtatják, azaz a hajtóműveket úgy működtetik, hogy az azok által kifejtett erő az űrhajó pillanatnyi sebességére merőleges legyen. (Ha a pályamódosítás alatt a hajtóművek által kifejtett erő minden pillanatban merőleges az űrhajó pillanatnyi sebességére, hosszú ideig tartó pályamódosítás alatt sem fog az E/m hányados változni. Tekintsük ugyanis az űrhajó megmaradó részét és az elégetendő üzemanyagot külön rendszereknek, amelyek között $\mathbf{F}(t)$ erő hat. Ez az erő az űrhajó megmaradó tömegén

$$L=\int \mathbf{F}(t)\mathbf{v}(t)dt \tag{3}$$

munkát végez. Mivel $\mathbf{F}(t)\mathbf{v}(t)$ minden pillanatban nulla, az űrhajó megmaradó tömegének energiája nem változik.)

A keringési idő kiszámításához felhasználjuk, hogy a gravitációs térben ellipszis pályán haladó test pillanatnyi sebessége a pálya adataival kifejezve

$$v^2=\gamma M[(2/r)-(1/a)]. \tag{4}$$

Itt a az ellipszis nagytengelyének a fele. (4) és (2) összevetéséből

$$E/m=-\gamma M/(2a) \tag{5}$$

adódik. Mivel a bal oldal nem változik a módosítás során, a sem változhat. A keringési idő Kepler III. törvénye szerint csak a nagytengelytől függ, tehát a keringési idő sem változik.

Benkő Zsigmond (Szolnok, Verseghy F. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. A feladat nem teljesen szabatos megfogalmazása lehetővé tesz egy másik értelmezést is: mivel (5) szerint E negatív, E akkor csökken, ha $|E|$ nő. Ennek megfelelően ha m k-szorosára csökken ($k<1$), $|E|$ $1/k$-szoros növekedését kívánjuk meg. Ekkor (5) szerint a-nak k^2-szeresére kell csökkennie. Felhasználva, hogy

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}}=2\pi\sqrt{\frac{a_0^2k^6}{\gamma M}}=T_0\cdot k^3,$$

a módosított pályán a keringési idő az eredeti k^3-szöröse. Megjegyezzük, hogy ilyen módosítás nem feltétlen hajtható végre egyszerű fékezéssel; ha ugyanis az űrhajó messzebb van a Földtől, mint a beállítandó pálya nagytengelye, a manőver során az űrhajót közelebb is kell vezetni a Földhöz. Az elbírálás során az itt vázolt gondolatmenetet követő megoldásokat is helyesnek fogadtuk el.