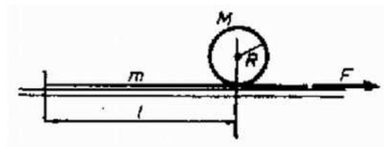
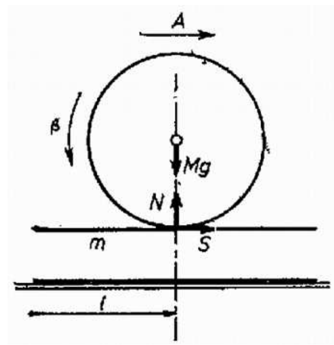
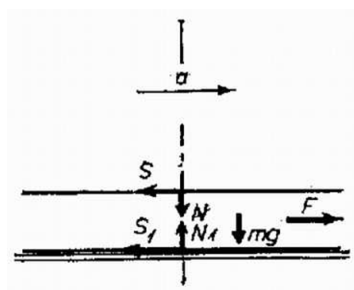



A golyóra a következő erők hatnak (1. ábra): súlyerő ($Mg$), nyomóerő ($N$), súrlódási erő ($S$). A fóliára ható erők (2. ábra): súlyerő ($mg$), húzóerő ($F$), nyomóerők ($N$ és $N_1$), súrlódási erők ($S$ és $S_1$). A gyorsulások és a szöggyorsulás jelölését, valamint a pozitív irányokat is feltüntettük az ábrán.




*1. ábra*




*2. ábra*

A mozgásegyenletek:

(1) $$MA = S,$$

(2) $$0 = Mg - N,$$

(3) $$\Theta\beta = SR,$$

(4) $$ma = F - S - S_1,$$

(5) $$0 = mg + N - N_1.$$

Itt

(6) $$\Theta = (2/5)MR^2$$

a golyó tehetetlenségi nyomatéka.

$F$ nagyságától függően három esetet különböztetünk meg:

*a)* $F$ elég kicsi. Ekkor a fólia odatapad az asztalhoz, a golyó sem mozog:

(7) $$a = 0;$$

(8) $$A = 0.$$

Az (1)–(8) egyenletrendszerből kapjuk, hogy

$$\beta = 0, \qquad S = 0, \qquad S_1 = F;$$

és természetesen a golyó szögsebessége is nulla:

$$\omega = 0.$$

Az *a)* eset megvalósulásának feltétele, hogy

$$S_1 \leq \mu N_1,$$

azaz

$$F \leqq \mu(m+M)g \tag{9}$$

legyen.

*b)* Ha

$$F > \mu(m+M)g,$$

de nem olyan nagy, hogy a golyó megcsússzék a fólián, akkor a fólia és a talaj közötti súrlódásra az

$$S_1 = \mu N_1, \tag{10}$$

valamint a golyó csúszásmentes gördülésére az

$$R\beta = a - A \tag{11}$$

egyenletek teljesülnek. Az (1)–(6), (10), (11) egyenletrendszert megoldva a következő eredményeket kapjuk:

$$a = \frac{7}{2}\frac{F-\mu(m+M)g}{M+\frac{7}{2}m}, \quad A = \frac{F-\mu(m+M)g}{M+\frac{7}{2}m}, \quad \beta = \frac{5}{2R}\frac{F-\mu(m+M)g}{M+\frac{7}{2}m}.$$

Szükségünk van még a golyó szögsebességére hosszú idő elteltével, azaz jóval a fólia kihúzása után. Ehhez először számítsuk ki, hogy mennyi ideig marad a fólián a golyó. A golyó gyorsulása a fóliához képest $a-A$, így a leesésig eltelt $t_1$ időre igaz a következő:

$$l = (1/2)(a-A)t_1^2,$$

ahonnan

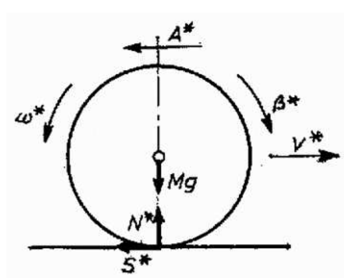
$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a-A}}.$$

Így a golyó szögsebessége a leesés pillanatában

$$\omega_1 = \beta t_1 = \sqrt{\frac{2l\beta}{R}}.$$

A golyó sebessége ekkor

$$v_1 = At_1 = (2/5)\sqrt{2lR\beta}.$$




*3. ábra*

Nagyon lényeges körülmény azonban az, hogy a golyó a sebességének megfelelő forgásiránnyal ellentétes irányban forog. A golyó mozgásegyenletei a talajra érkezés után (3. ábra):

$$0 = Mg - N^*,$$

$\Theta\beta^* = S^*R;$
$MA^* = S^*, 0 \quad = Mg - N^*, \Theta\beta^* = S^*R;$

valamint amíg a köszörülés (csúszva gurulás) tart, addig

$$S^* = \mu N^*.$$

Az $(1^*)$–$(4^*)$, (6) egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy

$$A^* = \mu g, \qquad \beta^* = (5/2)\mu g/R.$$

Így a golyó sebessége

$$v^* = v_1 - A^* t,$$

szögsebessége pedig

$$\omega^* = \omega_1 - \beta^* t$$

alakban függ az időtől.

A köszörülés abban a $t_2$ időpillanatban fejeződik be, amikor a golyó sebessége és szögsebessége kielégíti a gördülés

$$v^* = -\omega^* R$$

feltételét. Behelyettesítés után kapjuk, hogy

$$t_2 = \frac{2}{7}\frac{v_1 + \omega R}{\mu g} = \frac{2}{5}\frac{\sqrt{2lR\beta}}{\mu g}.$$

A keresett $\omega$ értéket az $\omega^*$ adja meg, ha behelyettesítjük a $t_2$ időt:

$$\omega = \omega^*(t_2) = \omega_1 - \beta^* t_2 = 0.$$

Így – érdekes módon – a golyó, miután elhagyta a fóliát, $t_2$ idő múlva megáll.

A *b)* eset megvalósulásának az a feltétele, hogy ne következzék be csúszás a golyó és a fólia között, azaz

$$S \le \mu N, \tag{12}$$

vagyis

$$A \le \mu g,$$
$$F \le \mu g\big[2M + (9/2)\,m\big]$$

legyen.

*c)* Ha

$$F > \mu g\big[2M + (9/2)\,m\big],$$

akkor az (1)–(6), (10) egyenletekhez az

$$S = \mu N \tag{13}$$

egyenlet csatlakozik, mivel a golyó és a fólia egymáson csúsznak. Az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy

$$a = \frac{F - \mu g(2M + m)}{m}, \qquad A = \mu g, \qquad \beta = \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}.$$

Ebben az esetben ismét ki kell számítanunk a golyó szögsebességét a talajra érést követő köszörülés befejezése után. A *b)* esethez hasonlóan a leesésig eltelt idő

$$t_3 = \sqrt{\frac{2l}{a - A}}.$$

A golyó szögsebessége a leesés pillanatában

$$\omega_3 = \beta t_3 = \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}\sqrt{\frac{2lm}{F - 2\mu g(M + m)}}.$$

A golyó sebessége ekkor

$$v_3 = A t_3 = \mu g\sqrt{\frac{2lm}{F - 2\mu g(M + m)}}.$$

Természetes, hogy az $(1^*)$–$(4^*)$, (6) egyenletrendszer írja le most is a mozgást, azaz az előző pontban felírt $\beta^*$ és $A^*$ értékekkel számolhatunk.

A golyó sebessége a köszörülés során

$$v^* = v_3 - A^* t,$$

szögsebessége

$$\omega^* = \omega_3 - \beta^* t.$$

A

$$v^* = -\omega^* R$$

egyenletből kifejezve a köszörülés időtartamát, azt kapjuk, hogy a köszörülés befejezésének időpontja

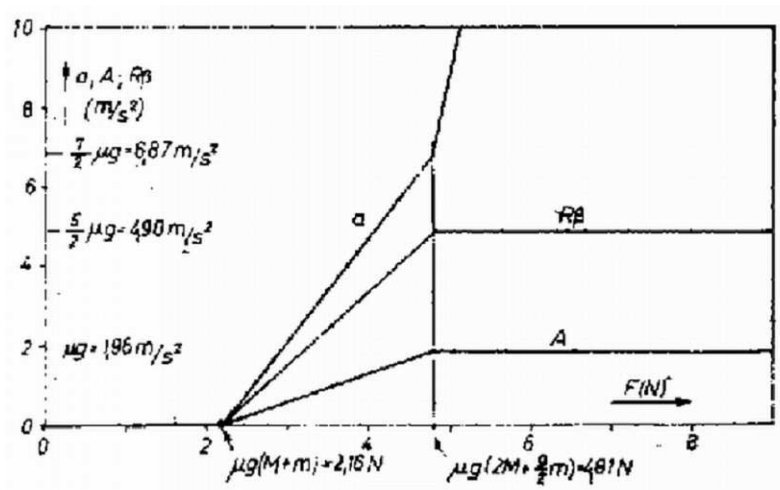
$$t_4 = \frac{2}{7}\frac{v_3 + \omega_3 R}{\mu g} = \sqrt{\frac{2lm}{F - 2\mu g(m+M)}}.$$

A keresett $\omega$ értéket az $\omega^*(t_4)$ behelyettesítéssel számíthatjuk ki:

$$\omega = \omega^*(t_4) = \omega_3 - \beta^* t = 0.$$

Ismét azt kaptuk, hogy a golyó állva marad.

A numerikus adatok felhasználásával nyert eredményeinket a 4. ábrán szemléltetjük.




*4. ábra*

*Csók Tibor* (Kecskemét, Katona J. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján

*Megjegyzés.* Az impulzus és impulzusmomentum tételének alkalmazásával közvetlenül és egyszerűen bizonyítható, hogy a golyó a végén állva marad.