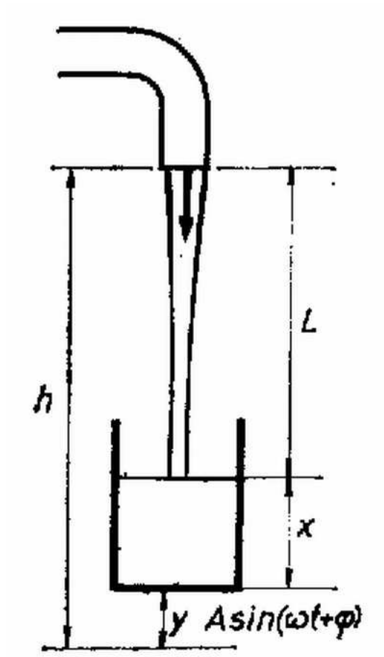
Legyen a csap keresztmetszete T_0, a víz kiáramlási sebessége v_0. A pohárról tegyük fel, hogy henger alakú és a keresztmetszete T_p, továbbá legyen rezgőmozgásának nullpontján a pohár alaplapja h távolságra a csaptól. A rezgőmozgást az

$$y = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{1}$$

egyenlet írja le, ahol y a függőleges kitérés, t az idő, A, ω és φ állandók.



A csapból t idő alatt kifolyó víz mennyisége:

$$V = T_0 v_0 t. \tag{2}$$

Ha t elegendően nagy, ennek egy része, V_p, már a pohárba jutott és x szintig megtöltötte a poharat.

$$V_p = T_p x. \tag{3}$$

Másik része még a levegőben tartózkodik, L hosszúságú keskenyedő vízsugarat alkotva. A vízsugár hossza függ a pohár pillanatnyi helyzetétől az ábráról leolvasható módon:

$$L = h - x - y = h - x - A\sin(\omega t + \varphi). \tag{4}$$

Ha a vízsugár térfogata $V(L)$, akkor az anyagmegmaradás miatt

$$\begin{gathered} V = V_p + V(L), \\ T_0 v_0 t = T_p x + V(L). \end{gathered} \tag{5}$$

Az L hosszúságú vízsugár térfogatát egyszerű megfontolással számíthatjuk ki. A csapból v_0 kezdősebességgel induló vízrészecske az L távolságot szabadon esve t^* idő alatt teszi meg:

$$\begin{gathered} L = v_0 t^* + (1/2) g t^{*2}, \\ t^* = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gL}}{g}, \end{gathered} \tag{6}$$

A fölötte levő vízoszlop térfogata éppen a t^* idő alatt kifolyó víz térfogata, azaz

$$V(L) = T_0 v_0 t^* = \frac{T_0 v_0}{g}\left(\sqrt{v_0^2 + 2gL} - v_0\right). \tag{7}$$

A (4) és (5) egyenletek felhasználásával összefüggést kapunk a vízszint emelkedése (x) és az eltelt idő között:

$$T_0 v_0 t = T_p x + \frac{T_0 v_0}{g}\left(\sqrt{\left[v_0^2 + 2gh - x - A\sin(\omega t + \varphi)\right]} - v_0\right). \tag{8}$$

Az egyenletet átrendezve, négyzetre emelve, majd az így nyert másodfokú egyenlet fizikailag reális gyökét megkeresve kapjuk:

$$x = \frac{T_0}{T_p} v_0 \left[t + \frac{v_0}{g} \left(1 - \frac{T_0}{T_p} \right) \right] -$$

$$-\frac{T_0 v_0}{T_p g} \sqrt{\left(1 - \frac{T_0}{T_p}\right)^2 v_0^2 + 2gh - 2\frac{T_0}{T_p} v_0 gt - 2gA\sin(\omega t + \varphi)}. \tag{9}$$

A levezetés során az időt a csap kinyitásának pillanatától mérjük. Ha a pohár kitérése ebben a pillanatban y_0, akkor a képletben szereplő fázis értéke:

$$\varphi = \text{arc } \sin \frac{y_0}{A}.$$

Mindaddig, amíg a vízsugár nem éri el a poharat, a (9) egyenletből x-re negatív értéket kapunk. Ezt a tartományt természetesen az üres pohárnak megfelelő $x = 0$ függvénnyel kell helyettesítenünk addig az időpontig, amikor a (9)-ből meghatározott x nulla nem lesz. Nagyon nagy időkre, amikor a pohárban levő víz felszíne eléri a csapot, a (9)-ből meghatározott x képzetes szám lesz.

A megoldás során feltételeztük, hogy a pohár lefelé irányuló sebessége mindig kisebb, mint a beérkező vízsugár sebessége, elhanyagoltuk a közegellenállást, valamint a cseppekre bomlás lehetőségét.

Szurdoki Julianna (Bp., Madách I. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Számos megoldó a vízsugár térfogatának számolásánál a nehezebbik utat választotta: a vízsugár alakjának meghatározása után a térfogatot integrálással számította ki.

2. A pohár feltöltődését a fentitől kissé eltérő gondolatmenettel is ki lehet számítani. A vízsugár pohárhoz viszonyított relatív sebességének és beérkezési keresztmetszetének a szorzata az időegység alatti térfogatváltozást adja. Mivel ez időben változó mennyiség, a térfogat időfüggését ennél a módszernél csak a meglehetősen bonyolult függvény integrálásával lehet megkapni.

3. A legtöbb megoldó egyszerűsítő feltételezésként elhanyagolta a vízszint emelkedését ($T_p \gg T_0$). Az ilyen, egyébként hibátlan dolgozatok 3 pontot kaptak.