Tételezzük fel, hogy az ütközés időtartama az inga lengésidejéhez képest elhanyagolhatóan kicsiny. Közvetlenül az ütközés után az ingát ezért még függőlegesnek tekinthetjük, így az ingából és a lövedékből álló rendszerre ható külső erők hatásvonala átmegy a P felfüggesztési ponton. Erre a pontra vonatkoztatva tehát a rendszerre külső forgatónyomaték nem hat, azaz az ütközés folyamán impulzusmomentuma nem változik. Az ütközés előtti impulzusmomentum:

(1) $$N_1 = mvl,$$

közvetlenül az ütközés után:

(2) $$N_1 = \Theta\omega$$

ahol ω az inga szögsebessége, Θ a rendszernek a P pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka az ütközés után:

(3) $$\Theta = ml^2 + M_1 l^2 + (1/3)Ml^2.$$

Feltettük, hogy a lövedék a M_1-et tartó csuklóhoz közel állt meg, így a P ponttól való távolsága l-nek tekinthető. Az impulzusmomentum nem változott:

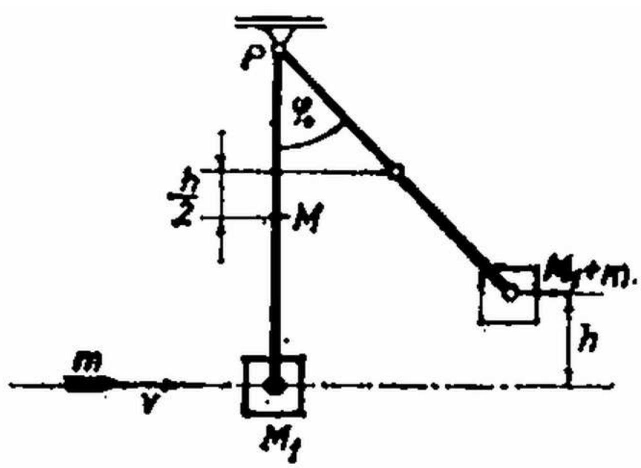
$$N_1 = N_2.$$

(1) és (2) felhasználásával az

(4) $$\omega = \frac{mvl}{\Theta}$$

egyenlőséghez jutunk.

Következő lépésként a munkatételt alkalmazzuk. A rendszeren a nehézségi erő által végzett munka megegyezik a rendszer mozgási energiájának megváltozásával. Jelöljük a maximális kitérés szögét φ_0-lal – itt az inga nyugalomban van – az inga mozgási energiáját φ szögű helyzetében $E(\varphi)$-vel!



Ekkor a mozgási energia megváltozása:

(5) $$E(\varphi_0) - E(0) = -(1/2)\Theta\omega^2.$$

(Feltevésünk szerint a m tömegű lövedék a csuklóhoz közel állt meg. A M_1 és m tömegű testekből álló fizikai inga lengésideje ezért igen nagy. Így M_1 elfordulása a maximális kitéréskor még elhanyagolható, saját forgási energiával nem rendelkezik.)

Figyelembe véve, hogy a lövedék és a M_1 tömeg súlypontja a maximális kitéréskor még közel egy magasságban van, és a nehézségi erő ellenében történik a munkavégzés, a nehézségi erő munkája (l. az ábrát):

(6) $$W = -(M_1 + m)gh - Mg(h/2) = -g\big[M_1 + m + (1/2)\ M\big]l(1 - \cos\ \varphi_0).$$

A munkatétel szerint:

$$W = E(\varphi_0) - E(0).$$

(5) és (6) alapján a következő egyenlőséghez jutunk:

$$-(1/2)\Theta\omega^2 = -gl(1 - \cos\ \varphi_0\big[M_1 + m + (M/2)\big].$$

Ebből (3) és (4) felhasználásával a maximális kitérésnél

$$\cos\varphi_0 = l - \frac{m^2v^2}{gl\big[M_1 + m + (1/3)M\big](2M_1 + 2m + M)}.$$

Ha ebből a képletből $\cos\varphi < -1$ adódik, maximális kitérésről nem beszélhetünk; ekkor az inga körbefordul.

Benkő Zsigmond (Szolnok, Verseghy F. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Az inga közvetlenül ütközés utáni szögsebességét másképp is kiszámíthatjuk. Newton II. törvénye szerint a lövedék lassítását okozó erő időintegrálja megegyezik az ütközés utáni és előtti impulzusok különbségével. Ha τ az ütközés ideje, ω az ütközés utáni szögsebesség és $I(t)$ a t időpontbeli impulzus, akkor:

$$\int_0^\tau F\mathrm{d}t = I(\tau) - I(0) = m\omega l - mv. \tag{7}$$

Az ingára ható forgatónyomaték idő szerinti integrálja megegyezik az ütközés utáni és előtti impulzusmomentumok különbségével. Newton III. törvénye szerint a lövedéket lassító F erő ellenerejének a forgatónyomatéka hat az ingára. Ha τ igen kicsi, F erőkarja l-nek vehető:

$$\int_0^\tau (-Fl)\mathrm{d}l = N(\tau) - N(0) = \big[M_1 + (1/3)M\big]l^2\omega. \tag{8}$$

A (7) és (8) egyenletek összevetéséből ω-ra (4)-gyel megegyező kifejezést kapunk.

Czuczor Lajos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)