Megoldás. A lejtőre helyezett testre a $G = mg$ súlyerő, a lejtő N merőleges nyomóereje, a K rugóerő és az S súrlódási erő hat. Egyensúlyi helyzetben ezek eredője nulla.

A lejtőre merőleges komponensek egyenlőségéből

$$N = mg\ \cos\alpha. \tag{1}$$

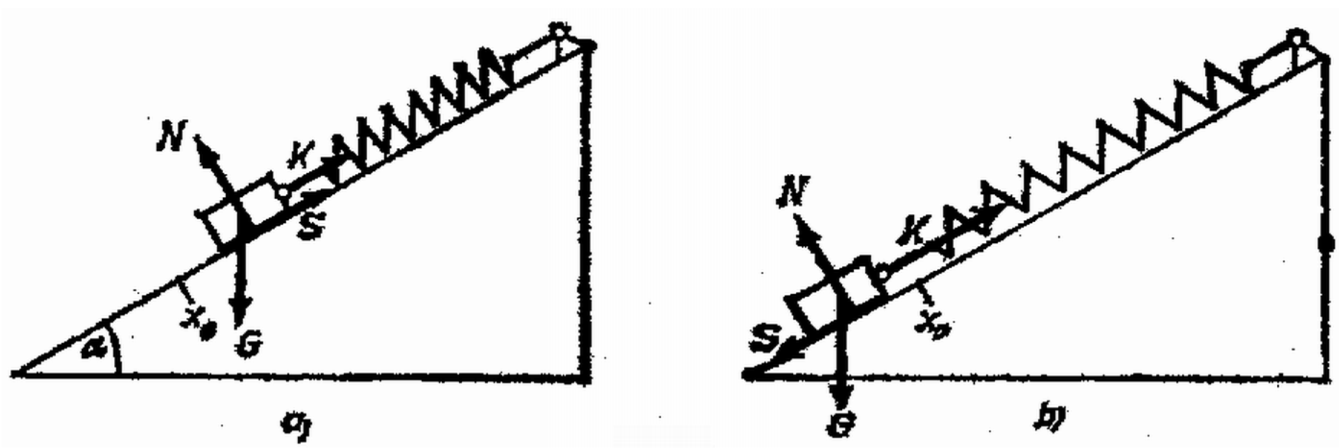
A lejtőirányú komponensekre vonatkozó egyenlet:

$$mg\sin\alpha - K = S, \tag{2}$$

ahol a

$$K = kx \tag{3}$$

rugóerő a rugó megnyúlásakor az 1. ábrán feltüntetett irányba mutat.



1. ábra

A (2) és (3) egyenletekből következik, hogy az

$$x_0 = (mg/k)\sin\alpha \tag{4}$$

egyensúlyi helyzethez nulla súrlódási erő tartozik. A rugó kevésbé megfeszített állapotában a súrlódási erő a rugóerővel megegyező irányú (1.a ábra), míg az $x > x_0$ esetben előjelet vált (1.b ábra). A súrlódási erő abszolút értékének maximális értéke μN, azaz a test abban a tartományban lehet nyugalomban, ahol

$$-\mu N \leq S \leq \mu N. \tag{5}$$

A (2) és (5) egyenletekből:

$$-\mu N \leq mg\ \sin\ \alpha - K \leq \mu N.$$

(1) és (3) alapján

$$-\mu mg\ \cos\ \alpha \leq mg\ \sin\ \alpha - kx \leq \mu mg\ \cos\ \alpha,$$

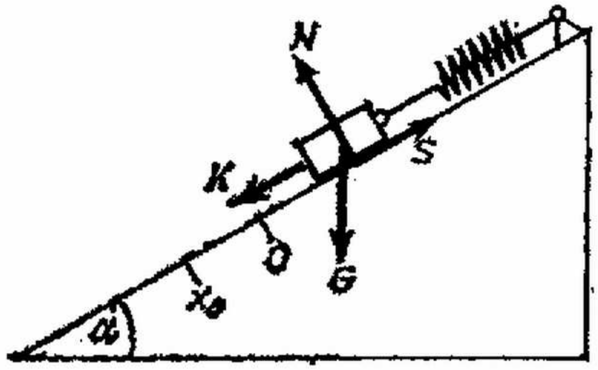
ahonnan az egyensúlyi tartomány:

$$(mg/k)(\sin\ \alpha - \mu\ \cos\ \alpha) \leq x \leq (mg/k)(\sin\ \alpha + \mu\ \cos\ \alpha). \tag{6}$$

A megadott értékekkel:

$$6{,}4 \text{ cm} \leq x \leq 13{,}2 \text{ cm}. \tag{7}$$

A (6) egyenlőtlenség bal oldalát megvizsgálva látszik, hogy – ha $\mu > \operatorname{tg}\alpha$ –, x negatív értéket is felvehet. A $\mu = \operatorname{tg}\alpha$ az a súrlódási együttható érték, amelynél már nincs szükség a rugó húzóerejére ahhoz, hogy a test nyugalomban maradjon. Ennél nagyobb súrlódásnál a súrlódási erő a rugó nyomóerejét is kompenzálni tudja (2. ábra).



2. ábra

A rugó megnyújtatlan állapotából elengedett test addig csúszik, amíg mozgási energiája nulla nem lesz. Ekkor helyzeti energiájának megváltozása egyrészt a súrlódási erő ellen végzett munkára fordítódik, másrészt a rugó energiáját növeli. x úton történő elmozdulásnál a helyzeti energia csökkenése:

$$\Delta E_h = mgx\ \sin\ \alpha,$$

a rugóenergia növekedése

$$\Delta E_r = (1/2)kx^2,$$

a mozgás közben állandó $S = \mu N = \mu mg \cos\alpha$ súrlódási erő ellen végzett munka:

$$\Delta W = x\mu mg \cos\alpha.$$

Az energiamegmaradás törvénye szerint:

$$\Delta E_h = \Delta E_r + \Delta W, \tag{8}$$

$$x(mg\ \sin\ \alpha - \mu mg\ \cos\ \alpha) - (1/2)kx^2 = 0. \tag{9}$$

A (9) egyenlet két megoldása:

$$x_1 = 0, \tag{10}$$

$$x_2 = 2(mg/k)(\sin\ \alpha - \mu\ \cos\ \alpha). \tag{11}$$

Ha $\mu \geq \operatorname{tg}\alpha$, (6) alapján a rugó megnyújtatlan marad, az $x_1 = 0$ megoldás a helyes.

Ha $\mu < \operatorname{tg}\alpha$ – mint a feladat számadataival – az x_1 gyök nem lehet fizikai megoldás, és a test a (11) eredményben adott utat teszi meg. A kitűzésben szereplő adatokkal

$$x_2 = 12{,}8\ \text{cm}. \tag{12}$$

Mivel ez a (7) egyenlőtlenséggel adott intervallumon belül van, ebben a pontban a test nyugalomban marad.

Szabó László (Miskolc, Földes F. Gimn., I. o. t.) és
Móricz Attila (Komárno, Magyar Tannyelvű Gimn., I. o. t.)
dolgozata alapján