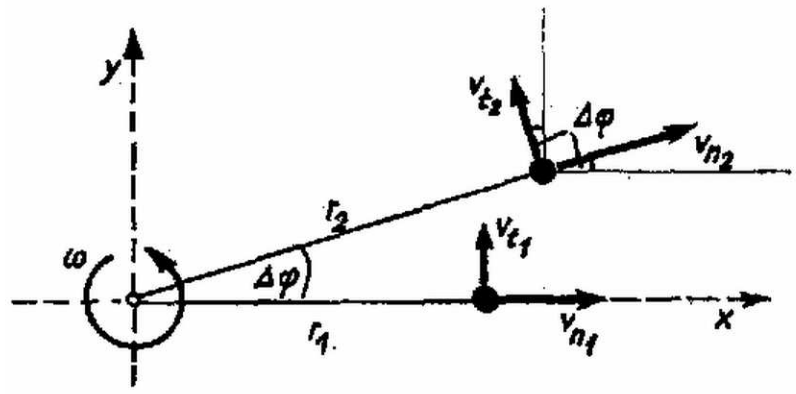
Nyugvó koordináta-rendszerben írjuk le a mozgást. Rajzoljuk föl két egymás utáni pillanatban a golyó sebesség-összetevőit (l. az ábrát).



A feladat szövege szerint a fonál úgy nyúlik, hogy az indulás utáni időpontban a fonál hossza (r_0 és v_0 állandók):

$$r = r_0 + v_0 \cdot t.$$

Ebből következik, hogy a sugárirányú v_n sebesség nagysága állandó: $v_{n1} = v_{n2} = v_0$. A kerületi sebesség a szögsebesség és a sugár szorzata, ezért:

$$v_{t1} = r_1\omega = (r_0 + v_0 t_1)\omega;$$

$$v_{t2} = r_2\omega = (r_0 + v_0 t_2)\omega.$$

Itt fölhasználtuk azt is, hogy a szögsebesség állandó. Ennek másik következménye az, hogy

$$\Delta\varphi = \omega(t_2 - t_1) = \omega\Delta t.$$

Ezek után felírhatjuk az x és y irányú teljes sebességváltozásokat:

$$\Delta v_x = v_{n2}\cos(\Delta\varphi) - v_{n1} - v_{t2}\sin(\Delta\varphi);$$

$$\Delta v_y = v_{t2}\cos(\Delta\varphi) - v_{t1} - v_{n2}\sin(\Delta\varphi).$$

Ahhoz, hogy a különböző irányú gyorsulásokat megállapíthassuk, $\Delta v/\Delta t$ hányadosokat kell képeznünk kis $\varDelta t$-k mellett. Ekkor $\varDelta\varphi$ is kicsi. Mivel

$$\sin(\varDelta\varphi) \approx \varDelta\varphi \quad \text{és} \quad \cos(\varDelta\varphi) \approx 1, \quad \text{ha} \quad (\varDelta\varphi) \ll 1,$$

azt kapjuk, hogy

$$\varDelta v_x \approx v_{n2} - v_{n1} - v_{t2} \cdot \varDelta\varphi,$$

$$\varDelta v_y \approx v_{t2} - v_{t1} - v_{n2} \cdot \varDelta\varphi.$$

v_n,v_t és $\varDelta\varphi$ kifejezését behelyettesítve:

$$\varDelta v_x \approx -(r_0 + v_0 t_1)\omega^2 \varDelta t;$$

$$\varDelta v_y \approx 2v_0\omega \cdot \varDelta t.$$

Ebből leolvassuk, hogy a t_1 időpontban a cső irányú gyorsulás

$$a_n = -(r_0 + v_0 t_1)\omega^2 = -r_1\omega^2,$$

a jól ismert centripetális gyorsulás. Ezt a golyóra ható egyetlen ilyen irányú erő, a kötél K kényszerereje biztosíthatja csak:

$$K = mr_1\omega^2.$$

Tetszőleges t időpontban

$$K(t) = m(r_0 + v_0 t)\omega^2.$$

A kötélerő tehát lineárisan nő időben. A csőre merőleges irányú gyorsulás állandó:

$$a_t = 2v_0\omega.$$

Ezt a cső falán ható erő hozza létre; ebből következik, hogy

$$F_n = 2mv_0\omega$$

nagyságú állandó erővel nyomja a golyó a csövet.

Kalcsú Zoltán (Szolnok, Verseghy F. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. F_n értékét más módon is meghatározhatjuk. Írjuk fel a golyóra a forgómozgás alapegyenletét a forgástengelyre vonatkoztatva!

$$M = \Delta N / \Delta t.$$

A K kötélerőnek nincs a forgástengelyre nézve forgatónyomatéka, hiszen az erő karja 0. Így $M = F_n \cdot r_1$. Az N impulzusnyomaték kifejezés pontszerű testre:

$$N = mrv = mr^2\omega.$$

Így

$$F_n \cdot r_1 = \frac{m\omega(r_2^2 - r_1^2)}{\Delta t}.$$

Ha Δt elég kicsi, r_2 és r_1 csak keveset tér el egymástól, tehát

$$r_2^2 - r_1^2 (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) \approx 2\Delta r \cdot r_1.$$

Ezzel

$$F_n r_1 \approx m\omega 2 r_1 \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t} = m\omega 2 r_1 v_0,$$

vagyis

$$F_n = 2 m v_0 \omega.$$

2. A golyó súlyának figyelembevétele csak annyi változást jelent, hogy a vízszintes irányú F_n-en kívül hat még a függőleges súlyerő is. Az eredő nyomóerő nagysága tehát

$$F_n' = \sqrt{(mg)^2 + F_n^2}.$$

3. A feladat megoldható forgó koordináta-rendszerben is.

4. Sok megoldó nem vette figyelembe, hogy annak ellenére, hogy v_n nagysága állandó, iránya változik, és ez is járulékot ad a tangenciális gyorsuláshoz. Így F_n-re $m v_0 \omega$ adódott.