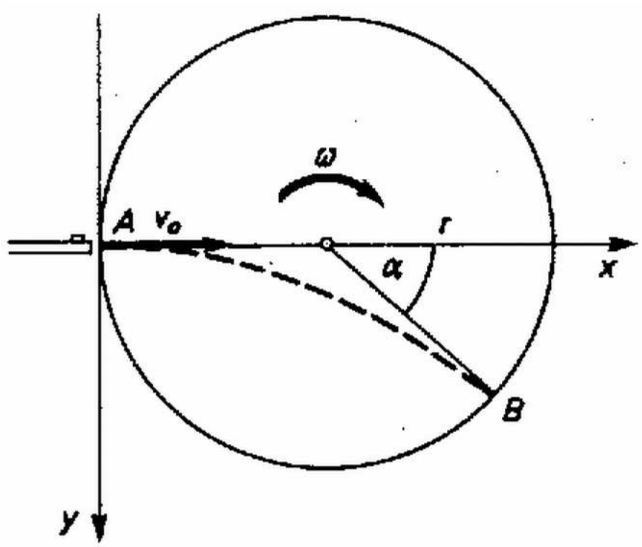
A lövedék az ábrán $B$-vel jelölt ponton hagyja el a henger belsejét.




Pályája az $A$ és $B$ pontok között parabola, amelyet az ábra szerint felvett koordináta-rendszerben a következő paraméteres egyenletrendszerrel írhatunk fel:

$$y=(g/2)t^2,$$
$$x=v_0t,$$

ahol $x$ és $y$ a lövedék koordinátái a $t$ időpontban, $v_0$ pedig az $A$ pontban a lövedék vízszintes irányú kezdősebessége. A papírhenger átlyukasztásához szükséges energiát elhanyagoljuk. A lövedék $t'$ idő alatt jut el a $B$ pontba, amelynek koordinátái az $\alpha$ szög segítségével egyszerűen felírhatók. Így

(1) $$(g/2)t'^2=r\sin\alpha,$$
(2) $$v_0t'=r(1+\cos\alpha).$$

Tegyük fel, hogy $\alpha$ elég kicsi, ekkor $\sin\alpha\approx\alpha$ és $\cos\alpha\approx 1$ (ezek 1 %-os pontossággal teljesülnek, ha $\alpha<0{,}1$.) Ezeknek a közelítéseknek a felhasználásával egyszerűen megoldható egyenletrendszert kapunk. A megoldások:

$$t'=2r/v_0;\qquad \alpha=2gr/v_0^2.$$

A lövedék akkor üt egy lyukat, ha a henger $t'$ idő alatt úgy fordul el, hogy az $A$ pont kerül $B$ helyére. Az ábrán jelölt forgásirányt véve pozitívnak, a hengernek tehát

$$\alpha\pm(2n+1)\pi\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

szöggel kell elfordulnia. Így a henger szögsebessége

$$\omega=\frac{\alpha\pm(2n+1)\pi}{t'}=\frac{g}{v_0}\pm(2n+1)\frac{\pi v_0}{2r}.$$

Mint említettük, ez a megoldás akkor ad jó közelítést, ha $\alpha<0{,}1$ azaz ha $v_0>\sqrt{20\ gr}$.

*Győri András* (Győr, Révai M. Gimn., III. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. Az (1) és (2) egyenletekből közelítés nélkül is számolhatunk tovább. (2) átrendezése után az egyenleteket négyzetre emeljük, majd összeadjuk:

$$\frac{g^2t'^4}{4}+v_0^2t'^2+r^2-2v_0t'r=r^2\sin^2\alpha+r^2\cos^2\alpha.$$

A jobb és bal oldalról elhagyjuk $r^2$-et, és $t'$-vel osztjuk az egyenletet, hisz nyilván $t'\neq 0$:

$$(g^2/4)t'^3+v_0^2t'-2v_0r=0.$$

Az így kapott hiányos harmadfokú egyenletnek csak egy valós gyöke van, ezt felírhatjuk a Cardano-formula segítségével:

$$t'=\sqrt[3]{\frac{4v_0}{g^2}}\left(\sqrt[3]{r+\sqrt{r^2+\frac{4v_0^4}{27g^2}}}+\sqrt[3]{r-\sqrt{r^2+\frac{4v_0^4}{27g^2}}}\right).$$

Ennek ismeretében $\alpha$-t is meghatározhatjuk, majd innen a már látott módon $\omega$-t is megkapjuk:

$$\omega = \frac{\arccos(v_0 t' - r) \pm (2n+1)\pi}{t'}, \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Az így kapott kifejezés azonban nagyon bonyolult.

2. Az (1) és (2) egyenletekből paraméteres alakban egyszerűbb módon kaphatunk összefüggést $v_0$ és $\omega$ között. (2)-ből beírjuk $t'$-t (1)-be, és átrendezés után $v_0$-ra kapjuk:

$$v_0 = \sqrt{\frac{rg}{2\sin\alpha}}(1+\cos\alpha).$$

$\omega$ felírásához még $t'$-t is meg kell határoznunk az egyenletrendszerből:

$$t' = \sqrt{\frac{2r\sin\alpha}{g}}.$$

Ennek ismeretében a szögsebesség:

$$\omega = [\alpha \pm (2n+1)\pi]\sqrt{\frac{g}{2r\sin\alpha}}, \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Ezen képletek segítségével bármely $0 < \alpha < \pi$-hoz meghatározhatjuk $\omega$-t és $v_0$-t. Ha, pl. $\alpha = 90^\circ$, akkor a lövedék kezdősebessége és a henger szögsebessége a következő:

$$v_0 = \sqrt{\frac{rg}{2}}; \qquad \omega = \left[\frac{\pi}{2} \pm (2n+1)\pi\right]\sqrt{\frac{g}{2r}}, \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$