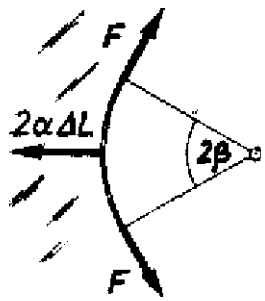
I. megoldás. Egy kis ΔL hosszúságú fonaldarabra – mivel ez két felülettel érintkezik – a felületi feszültség miatt $2\alpha\Delta L$ nagyságú erő hat.



1. ábra

A görbült fonaldarabban ébredő erő egyensúlyozza ezt ki, így az 1. ábra szerint:

$$2F\,\sin\beta = 2\alpha\Delta L.$$

Kis β esetén $\sin\beta \approx \beta$, figyelembe véve továbbá azt, hogy $2\beta R = \Delta L$, kapjuk:

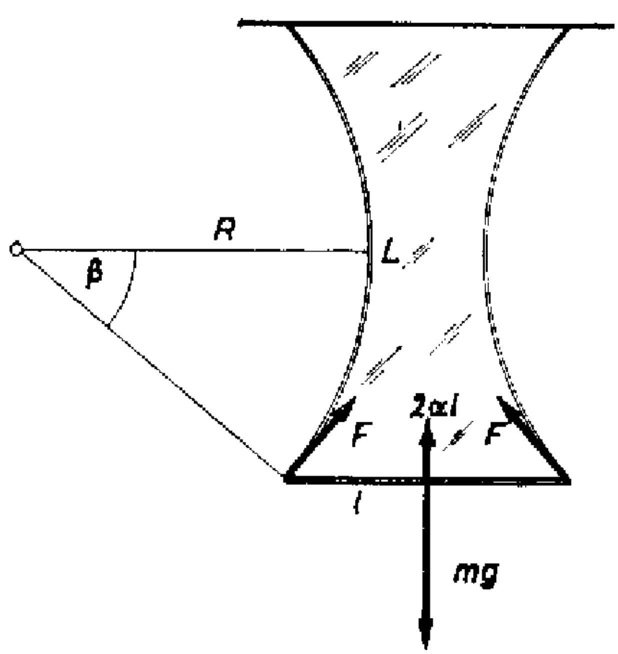
(1) $$F = 2\alpha R.$$

A fonalban végig ugyanakkora erő hat, így a fonál hártyával érintkező szakasza egy körív lesz.

Miután kiengedjük az edényből a folyadékot, a rudak és fonalak között egy hártya marad vissza. A fonalak alakja a kezdeti feltételektől függően különböző lehet, mint azt a továbbiakban részletesen végignézzük.

A felfüggesztett l hosszúságú rúdra a fonalak húzóereje, a folyadékhártya felületi feszültsége által keltett erő és a súlyerő hat. Attól függően, hogy a felületi feszültség okozta $2\alpha l$ erő nagyobb-e a súlyerőnél, két esetet különböztethetünk meg. Ha $mg \le 2\alpha l$, a fonál hozzásimul és részben hozzáfekszik a rudakhoz. Mindkét eseten belül további két eset lehetséges, attól függően, hogy a két L hosszúságú felfüggesztő fonál összeér-e.

i) Tárgyaljuk azt az esetet, amikor $mg \ge 2\alpha l$ és a két felfüggesztő fonál nem ér össze. Ekkor a 2. ábrán látható elrendezés jön létre.



2. ábra

Az ábra jelölésével felírva a rúdra ható erők egyensúlyát:

(2) $$mg = 2\alpha l + 2F\,\cos\beta.$$

Tudjuk továbbá a bevezetőből a fonalban ható erő és a görbület kapcsolatát:

(3) $$F = 2\alpha R.$$

Ismerjük a felfüggesztő fonalak hosszát is:

(4) $$L = 2R\beta.$$

(3) és (4) felhasználásával így alakul a (2) egyenlet:

(5) $$\frac{\cos\beta}{\beta} = \frac{mg - 2\alpha l}{2\alpha L}.$$

Ha $mg \gg 2\alpha(l + L)$, akkor β kis szög lesz, ekkor használhatjuk a $\cos\beta \approx 1 - (\beta^2/2)$ helyettesítést, az így kapott másodfokú egyenlet gyöke:

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{mg - 2\alpha l}{2\alpha L}\right)^2 + 2} - \frac{mg - 2\alpha l}{2\alpha L}.$$

Egyéb esetekben pl. grafikus úton tudjuk megoldani az egyenletet. β ismeretében a (4) egyenlet felhasználásával meghatározhatjuk a görbületi sugarat is. A rúd emelkedése az ábra jelöléseivel:

$$\Delta h = L - 2R\sin\beta,$$

felhasználva a (4) egyenletet:

$$\Delta h = L\left(1 - \frac{\sin\beta}{\beta}\right).$$

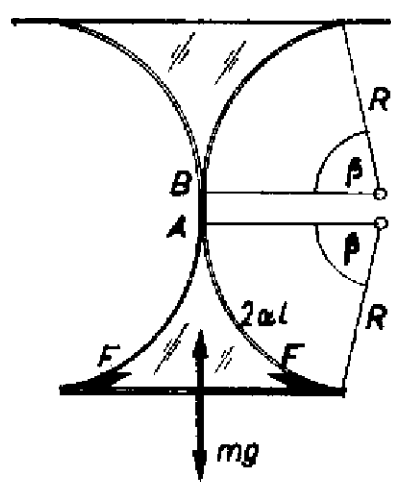
Ezt az (5) egyenlet megoldása nélkül is meg tudjuk határozni, mivel $\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta}$, így:

$$\Delta h = L\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{mg - 2\alpha l}{2\alpha L}\right)^2}\right).$$

Ez a megoldás akkor helyes, ha a fonalak nem érnek össze, azaz ha

(6) $$2(R - R\cos\beta) < l, \qquad \text{átírva} \qquad (L/\beta)(1 - \cos\beta) < l.$$

ii) Legyen továbbra is $mg \geq 2\alpha l$, de a fonalak most érjenek össze. Ekkor a 3. ábrán látható helyzet jön létre.



3. ábra

A (2) és (3) egyenletek most is érvényesek. (4) helyett azonban most más feltételt kell keresni. Az A és B pontok között a két fonal tartja csak a rudat, így az új egyenlet:

(7) $$F = mg/2.$$

(2)-ből most (7) és (3) felhasználásával a következőt kapjuk:

$$\cos\beta = \frac{mg - 2\alpha l}{mg}.$$

Továbbá $R = mg/(4\alpha)$. A rúd emelkedése ebben az esetben:

$$\Delta h = 2(R\beta - R\sin\beta) = mg/(2\alpha) \cdot (\beta - \sin\beta).$$

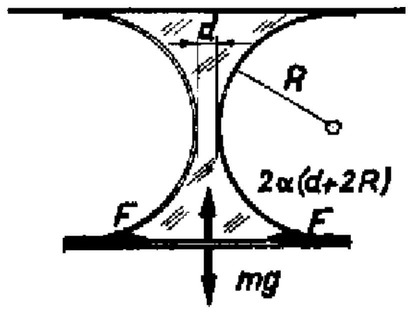
Ez a helyzet akkor áll fenn, ha

$$2R\beta \le L, \qquad \text{vagyis} \qquad mg/(2\alpha)\cdot\beta \le L.$$

Ha ez a feltétel nem teljesül, nyilván az i) esetről van szó, így a (6) feltétel ekvivalens a következővel:

$$\frac{mg}{2}\arccos\frac{mg-2\alpha l}{mg} > L.$$

iii) Legyen most $mg \le 2\alpha l$, és a fonalak ne érjenek össze. Ekkor a 4. ábrán látható állapotot kell elemeznünk.



4. ábra

A fonalak hozzásimulnak a rúdhoz, és részben hozzá is tapadnak. A rúdra ható erők függőleges komponenseinek egyensúlyi feltétele:

$$mg = (d+2R)\cdot 2\alpha.$$

A fonál hosszára vonatkozó feltétel:

$$L = l - d - 2R + R\pi.$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$R = \frac{mg + 2\alpha L - 2\alpha l}{2\alpha\pi}.$$

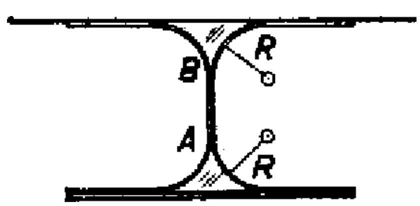
A rúd emelkedése most a következő:

$$\Delta h = L - 2R = \frac{2\alpha l + \alpha L(\pi-2) - mg}{\alpha\pi}.$$

Ez az eset akkor jön létre, ha d-re pozitív szám adódik, így a következő feltételt kapjuk:

$$mg/(4\alpha)\cdot(\pi-2) + l > L.$$

iv) Most legyen $mg \le 2\alpha l$ és a fonalak érjenek össze. Az ekkor létrejövő állapotot az 5. ábra mutatja.



5. ábra

Nyilvánvalóan érvényes a (3) és a (7) egyenlet, amiből

$$R = mg/4\alpha.$$

A rúd emelkedésére a következőt kapjuk:

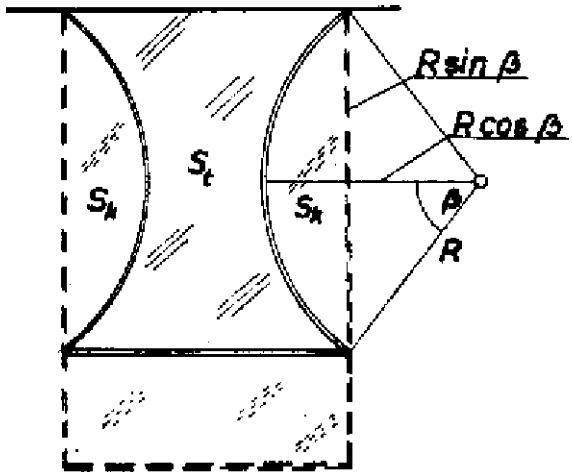
$$\Delta h = (l - 2R + R\pi) - 2R = l + mg/(4\alpha)\cdot(\pi - 4).$$

Ez az állapot akkor jön létre, ha a fonál elég hosszú, azaz a feltétel:

$$mg/(4\alpha)\cdot(\pi-2) + l \le L.$$

Harsányi Gábor (Bp., Radnóti M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. A fonalak és rudak között maradó folyadékhártya felületi feszültsége csökkenteni igyekszik a folyadékfelszínt. Az egyensúlyi állapotra jellemző, hogy a rendszer potenciális energiája minimális (a helyzet kis megváltoztatása a potenciális energia növekedésével jár együtt). A rendszer helyzeti energiája a folyadék felületi és a rúd helyzeti energiájának összege. Számoljuk ki a 2. ábrán látható elrendezés helyzeti energiáját!



6. ábra

A folyadékhártya felületét a 6. ábra alapján határozhatjuk meg:

$$S = S_t - 2 \cdot S_k.$$

S_t egy téglalap felülete: $S_t = 2 \cdot lR \sin\beta$; S_k egy körszelet,területét egy körcikk és egy háromszög területének különbségeként kapjuk: $S_k = R^2(\beta - \sin\beta\cos\beta)$. Felhasználva, hogy $R = L/(2\beta)$, kapjuk a folyadékhártya felületi energiáját:

$$W_f = 2\alpha L\left(l\,\frac{\sin\beta}{\beta} - \frac{L}{4}\cdot\frac{2\beta - \sin 2\beta}{\beta^2}\right).$$

A rúd helyzeti energiája a kezdeti állapothoz viszonyítva:

$$W_r = mg(L - 2R\sin\beta).$$

A teljes energiára így a következő kifejezést kapjuk:

$$W = 2\alpha L\left(l\,\frac{\sin\beta}{\beta} - \frac{L}{4}\cdot\frac{2\beta - \sin 2\beta}{\beta^2}\right) + mgL\left(1 - \frac{\sin\beta}{\beta}\right).$$

Számítsuk ki a helyzeti energia β szerinti deriváltját:

$$W'(\beta) = \frac{\cos\beta(\beta - \operatorname{tg}\beta)}{\beta^2}\cdot L\left[2\alpha l - mg + 2\alpha L\,\frac{\cos\beta}{\beta}\right].$$

Ennek a kifejezésnek a zéróhelye adja az egyensúlyi helyzetet. A szorzat első tényezője 0 és 90° között nem ad megoldást, így a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{\cos\beta}{\beta} = \frac{mg - 2\alpha l}{2\alpha L}.$$

Ez ugyanaz az egyenlet, mint amelyet az előző megoldásban írtunk fel.

Zsigmond Géza (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)