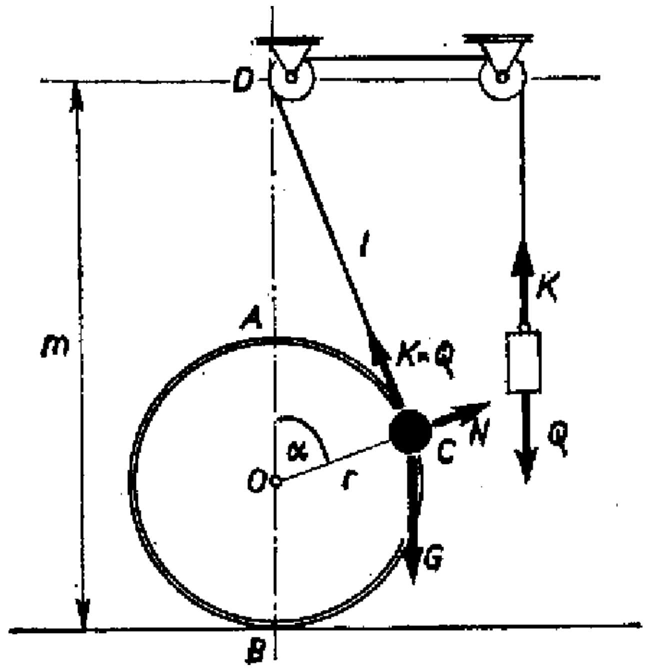
Az egyensúly feltétele, hogy az ábrán látható G súlyú testre ható G súlyerő, $K = Q$ nagyságú kötélerő és a karikára merőleges N kényszererő eredője zérus legyen. Ez a feltétel nyilvánvalóan teljesíthető, ha a G súlyú test a karika A, ill. B pontjában van.



Ha a test az α-val jellemezhető C pontban van egyensúlyban, a G és Q erők között a következő összefüggés áll fenn, mivel az erők vektorháromszöge hasonló az OCD háromszöghöz:

(1) $$Q/G = l/(m-r),$$

ahol az ábra alapján

(2) $$l = \sqrt{(m-r)^2 + r^2 - 2r(m-r)\cos\alpha}.$$

Az előző két kifejezésből a $\cos\alpha$ értéke a rendszer egyensúlya esetén:

(3) $$\cos\alpha = \frac{(m-r)^2[1 - Q^2/G^2] + r^2}{2r(m-r)}.$$

(3) jobb oldala akkor lesz -1 és 1 közötti szám, ha

$$mG > (m-r)Q.$$

Ezen feltétel teljesülése esetén lehet a szóban forgó egyensúlyi helyzetet megvalósítani.

A feladat szimmetriája miatt az egyensúly feltétele teljesül az AB tengely másik oldalán is, így a test a karika négy pontjában lehet egyensúlyban. Ha $Q \gg G$, akkor az A pont stabil, a másik kettő instabil, ellenben, ha $G \gg Q$, akkor csak a B pont lesz stabil. A probléma részletesebb elemzéséhez már a differenciálszámítás ismerete szükséges.

Az egyensúlyi helyzetek stabilitásának vizsgálatánál azt kell megnézni, hogy a testet kimozdítva a vizsgált pontból, a végzett munka pozitív (stabil) vagy negatív-e (instabil állapot). Mivel a külső munka a test helyzeti energiáját változtatja meg, ezért elég azt megnézni, hogy a helyzeti energiának az adott pontban minimuma (stabil) vagy maximuma (instabil) van.

A rendszer helyzeti energiája az A pontbeli helyzethez viszonyítva α szög függvényében:

(4) $$E(\alpha) = -Gr(1-\cos\alpha) + Q\left[\sqrt{(m-r)^2 + r^2 - 2r(m-r)\cos\alpha} - m + 2r\right].$$

Ezen függvény ismeretében az egyensúlyi helyzeteket a $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\alpha = 0$ feltételből is meghatározhattuk volna. Az $E(\alpha)$ függvény minimumát, ill. maximumát az egyensúlyi helyzetekben a $\mathrm{d}^2E/\mathrm{d}\alpha^2$ függvény előjele dönti el. Az $E(\alpha)$ függvény második deriváltja:

(5) $$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}\alpha^2} = \left[Q\,\frac{m-r}{l} - G\right] r\cos\alpha - Q\frac{r^2(m-r)^2}{l^3}\sin^2\alpha.$$

Ez a mennyiség az $\alpha = 0$ egyensúlyi helyzetben pozitív, azaz az egyensúlyi helyzet stabil, ha $G < \big[(m-r)/(m-2r)\big]Q$. A B pont akkor stabil, ha $G > \big[(m-r)/m\big]Q$. A C pont mindig instabil, mivel az (5) egyenlet első tagja abban a pontban (1) alapján zérus, a második pedig mindig negatív.

Érdemes megjegyezni, hogy ha $(m-r)/m < G/Q < (m-r)/(m-2r)$, akkor mind az A, mind a B helyzet stabil.

Molnár László