I. megoldás. Jelöljük a golyók távolságát valamely t időpillanatban x-szel! Az energiamegmaradás szerint:

$$2 \cdot (1/2)mv^2 + kq^2/x = kq^2/x_0,$$

ahol x_0 a golyók távolsága akkor, amikor azok állnak. (q a golyók töltése, m a tömege.) A golyók sebességének nagysága

$$v = (l/2)\mathrm{d}x/\mathrm{d}t.$$

Ezt behelyettesítve és $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$-t kifejezve

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{4kq^2}{m}\ \frac{x-x_0}{xx_0}}$$

adódik. A keresett x távolság – mint a t idő függvénye – minden t időpillanatban kielégíti a fenti összefüggést. (Azt mondjuk, hogy az $x(t)$ függvény egy ún. differenciálegyenletet elégít ki.) Ezenkívül tudjuk, hogy $x(0) = x_0$. Be lehet bizonyítani, hogy ilyen függvény pontosan egy létezik, továbbá heurisztikusan a következőképpen nyerhető.

Az egyenletből kicsiny Δt esetén kapjuk:

$$\Delta t = \Delta x\sqrt{\frac{mx_0}{4kq^2} \cdot \frac{x}{x-x_0}}.$$

Osszuk fel az $(x_0,\ 2x_0)$, valamint az ennek megfelelő időintervallumot kicsiny részekre. A j-edik részekre a következő érvényes:

$$\Delta t_j = \Delta x_j\sqrt{\frac{mx_0}{4kq^2} \cdot \frac{x_j}{x_j-x_0}}.$$

Ezeket összegezve

$$t_{x_0} = \sum_{j-1}^{n} \Delta t_j = \sum_{j-1}^{n} \Delta x_j\sqrt{\frac{mx_0}{4kq^2} \cdot \frac{x_j}{x_j-x_0}}.$$

A jobb oldal az

$$\int\limits_{x_0}^{2x_0} \sqrt{\frac{mx_0}{4kq^2} \cdot \frac{x}{x-x_0}}\mathrm{d}x$$

integrál egy közelítő összege, ezért a felosztás finomításával a következőt kapjuk:

$$t_{x_0} = \int\limits_{x_0}^{2x_0} \sqrt{\frac{mx_0}{4kq^2} \cdot \frac{x}{x-x_0}}\mathrm{d}x.$$

Vezessük be az x helyett az $x/x_o = z$ változót:

$$t_{x_0} = \sqrt{\frac{mx_0^3}{4kq^2}} \cdot \int\limits_1^2 \sqrt{\frac{z}{z-1}}\mathrm{d}z.$$

Az első esetben $x_0 = l$, tehát

$$t_i = \sqrt{\frac{ml^3}{4kq^2}} \int\limits_1^2 \sqrt{\frac{z}{z-1}}\mathrm{d}z.$$

A második esetben $x_0 = 3l$, így

$$t_{3l} = \left(\frac{m3^3l^3}{4kq^2}\right)^{1/2} \int\limits_1^2 \sqrt{\frac{z}{z-1}}\mathrm{d}z = 3 \cdot \sqrt{3}t_l.$$

Faragó Béla (Csongrád, Batsányi J. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. A feladatban vegyük adottnak a golyók töltését (q), tömegét (m) és a kezdeti távolságukat (x_0), és keressük azt a t_{x_0}, időt, amely alatt a kezdeti távolság megduplázódik! Vizsgáljuk meg, hogy milyen alakban függhet t_{x_0}, a megadott g, m és x_0 mennyiségektől, valamint a Coulomb-törvényben szereplő k állandótól. A megadott mennyiségek között nincs idő dimenziójú mennyiség, tehát a t_{x_0}, kifejezése csak

$$t_{x_0} = q^{\alpha_1} \cdot k^{\beta_1} \cdot x_0^{\gamma_1} \cdot m^{\delta_1} \cdot f(q^{\alpha_2} \cdot k^{\beta_2} \cdot x_0^{\gamma_2} \cdot m^{\delta_2})$$

alakú lehet, ahol $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ és $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ olyanok, hogy $q^{\alpha_1} \cdot k^{\beta_1} \cdot x_0^{\gamma_1} \cdot m^{\delta_1}$ idő dimenziójú, a $q^{\alpha_2} \cdot k^{\beta_2} \cdot x_0^{\gamma_2} \cdot m^{\delta_2}$ kombináció pedig dimenziótlan. Megvizsgálva a megadott mennyiségek dimenzióját (pl. MKS rendszerben $[q] =$

C, $[k]=\dfrac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^3}{\mathrm{C}^2\cdot\sec^2}$; $[x_0]=m; [m]=\mathrm{kg}$), azt találjuk, hogy feltételeinket csak az $\alpha_1=-1,\ \beta_1=-1/2,\ \gamma_1=3/2,\ \delta_1=1/2$ és $\alpha_2=0,\ \beta_2=0,\ \gamma_2=0,\ \delta_2=0$ elégíti ki. Ennek alapján

$$t_{x_0}=\left(\frac{mx_0^3}{kq^2}\right)^{1/2}\cdot f,$$

ahol az f dimenziótlan számot a probléma meghatározza, de nem függ az adott mennyiségektől. Ha $x_0=l$,

$$t=t_i=\left(\frac{ml^3}{k\cdot q^2}\right)^{1/2}f,$$

ha pedig $x_0=3l$,

$$t_{3l}=\left(\frac{m27l^3}{k\cdot q^2}\right)^{1/2}f=3\sqrt{3}\cdot t_l$$

Tóth András (Pécs, Nagy Lajos Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés: A II. megoldásban a dimenziókat MKS rendszerben írtuk fel. Be lehet látni, hogy a dimenzióanalízis eredménye nem függ a választott egységrendszertől, a dimenzióanalízis a természeti törvények mértékegységrendszertől való függetlenségén alapszik.

A II. Megoldás f állandója az I. megoldásból megkapható:

$$f=\frac{1}{2}\cdot\int_1^2\sqrt{\frac{z}{z-1}}\mathrm{d}z.$$