I. megoldás. Az egyszerűség kedvéért tekintsük úgy, hogy m a motor forgórészének tömege, és az állórész tömege elhanyagolható. Az állórész tömegének figyelembevétele csak a korong tehetetlenségi nyomatékát növelné. Tegyük fel továbbá, hogy a korong szöggyorsulása állandó.

A forgórész mozgását tömegközéppontjának haladó mozgásából és tömegközéppontja körüli forgásból tehetjük össze. A tömegközéppont gyorsuló körmozgást végez, gyorsulása érintő irányban $\beta' d$, tehát a forgórészre érintő irányban

$$F = m\beta' d \tag{1}$$

erő hat. A motorra ható centripetális erő hatásvonala átmegy a korong tengelyén, tehát ellenerejének nincs forgatónyomatéka a korongra.

A forgórész a Földhöz képest β szöggyorsulással forog tömegközéppontja körül, így rá

$$M = \vartheta\beta \tag{2}$$

forgatónyomaték hat.

A nagy korong F ellenereje, valamint az M forgatónyomatékot létrehozó erőpárok erőinek ellenereje hatására jön forgásba, tehát a nagy korong szöggyorsulása a

$$\Theta\beta' = -M - Fd \tag{3}$$

egyenletből határozható meg. (1)-et és (2)-t behelyettesítve nyerjük:

$$\beta' = -\frac{\vartheta}{\Theta + md^2}\beta.$$

Faragó Béla (Csongrád, Batsányi J. Ginm., IV. o. t.)

II. megoldás. A feladatot megoldhatjuk az impulzusmomentum megmaradása tételének felhasználásával is, mivel a korong tengelyére vonatkozóan nem hat a rendszerre külső forgatónyomaték. Egy adott pillanatban a motor forgórésze ω, a korong ω' szögsebességgel forog a Földhöz képest. Határozzuk meg, mekkora ekkor a rendszer impulzusmomentuma! Az impulzusmomentumot mindkét testre ugyanarra a nyugvó tengelyre, a nagy korong tengelyére kell felírnunk.

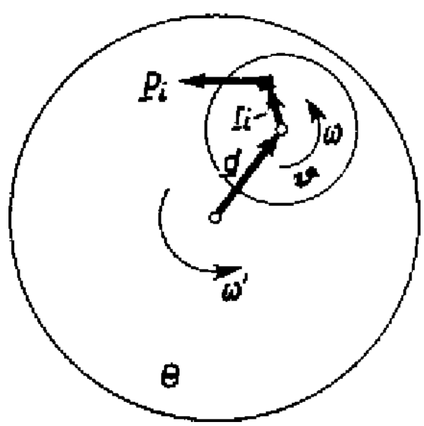
A korong impulzusmomentuma

$$N_1 = \Theta\omega'. \tag{1}$$

Mivel bármely test mozgása tömegközéppontjának haladó mozgásából és a tömegközéppont körüli forgásból tehető össze, valószínű, hogy a forgórész impulzusmomentuma

$$N_2 = md^2\omega' + \vartheta\omega, \tag{2}$$

ahol az első tag a tömegközéppont körmozgásából, a második a forgásból származik. Ezt az összefüggést azonban az impulzusmomentum pontos definíciója alapján bizonyítani kell. Osszuk fel a forgórészt kis tömegelemekre, amelyeknek a Földhöz viszonyított impulzusa $\mathbf{p}_i$, a forgórész középpontjából kiindulva helyvektora $\mathbf{r}_i$ (l. az ábrát).



Ekkor

$$\mathbf{N}_2 = \sum_i (\mathbf{d} + \mathbf{r}_i) \times \mathbf{p}_i = \mathbf{d} \times \sum_i \mathbf{p}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i. \tag{3}$$

$\sum_i \mathbf{p}_i = m\mathbf{v}$, ahol $\mathbf{v}$ a forgórész tömegközéppontjának sebessége. Így (3) első tagja

$$\mathbf{d} \times \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{d} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{d} \times (\omega' \times \mathbf{d}) = md^2\omega'.$$

(3) második tagja definíció szerint a forgórész saját tengelyére vonatkozó impulzusmomentuma, így

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \vartheta\omega.$$

Ezzel (2) helyességét igazoltuk. Feltéve, hogy a rendszer kezdetben nyugalomban volt, t idővel a motor bekapcsolása után $\omega = \beta t$, $\omega' = \beta' t$ (a korong szöggyorsulását állandónak tételezzük fel), és az impulzusmomentum megmaradásának tétele szerint

$$\begin{aligned} 0 &= \Theta\omega' + md^2\omega' + \vartheta\omega, \\ 0 &= \Theta\beta' t + md^2\beta' t + \vartheta\beta t, \\ \beta' &= -\frac{\vartheta}{\Theta + md^2}\beta. \end{aligned}$$

Kriza György (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Sok megoldó a forgórész tömegközéppontjának mozgását a korong tehetetlenségi nyomatékának md^2-tel való növelésével vette figyelembe, és elfelejtkezett a korong és a motor között ható érintő irányú erőről, illetve a forgórész implzusmomentumát saját tengelyére írta fel. Bár ezek a dolgozatok helyes végeredményt adtak, a jogosulatlan feltevések miatt hiányosak.