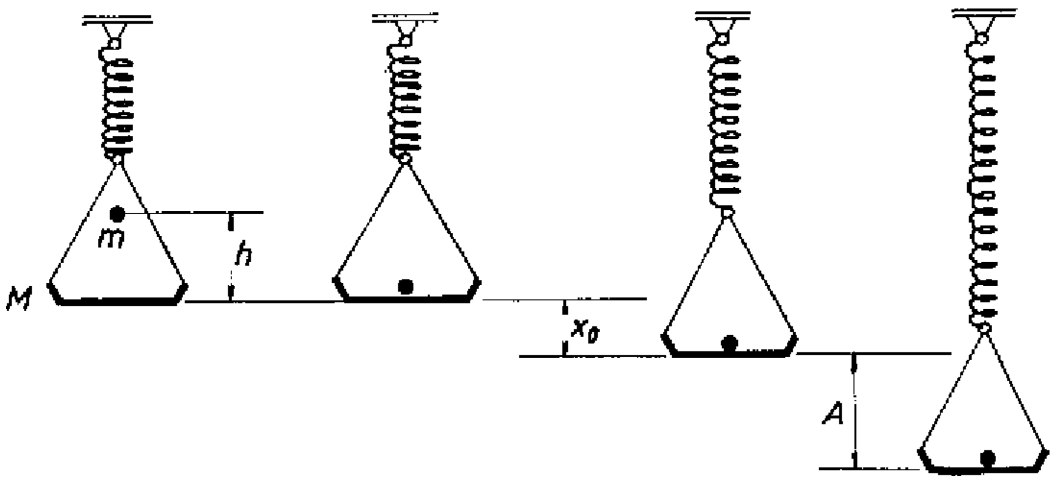
A tányér a golyó rugalmatlan becsapódása után harmonikus rezgőmozgást fog végezni. Jelöljük ennek a mozgásnak a kitérését az ütközés utáni pillanatban x_0-lal, a sebességét pedig v_0-val. v_0 a tányérnak és a golyónak a rugalmatlan ütközés során kialakult közös sebessége. Ütközés előtt a golyó sebessége $\sqrt{2\,gh}$ volt, így

$$(M+m)v_0 = m\sqrt{2\,gh}, \qquad v_0 = [m/(m+M)]\cdot\sqrt{2\,gh}.$$

A harmonikus rezgőmozgás középpontja az a pont, amelyben a rugóra felfüggesztett tányér a benne levő golyóval egyensúlyban lehetne. A rugót az M tömegű tányér már megnyújtva tartja, a beléhelyezett golyó tovább nyújtaná. Ez a nyúlás megkapható a direkciós erő definíciója segítségével:

$$D = \Delta F/\Delta l;\ \text{a jelen esetben}\ \begin{aligned}\Delta F &= mg,\ \text{így}\\ \Delta l &= mg/D.\end{aligned}$$

Az ütközés abban a magasságban történik, ahol az üres tányér van egyensúlyban, tehát $x_0 = \Delta l$-lel a rezgésközéppont fölött.



Ha a kitérést a rezgés középpontjától mérjük, az időt pedig az ütközéstől, a kitérés, a sebesség és a gyorsulás rendre

$$\begin{aligned}x &= A\sin(\omega t+\varphi),\\ v &= A\omega\cos(\omega t+\varphi),\\ a &= -A\omega^2\sin(\omega t+\varphi),\end{aligned}$$

ahol a rezgés körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{D/(m+M)}.$$

A rezgés amplitúdóját akár a $t=0$; $x=x_0$, $v=v_0$ kezdeti feltételek helyettesítésével, akár a rezgés energiájának felhasználásával számolhatjuk. Ez utóbbiról tudjuk, hogy $(1/2)DA^2$, és egyenlő a tetszőleges pillanatban vett kitéréshez tartozó rugalmas energia ($(1/2)Dx^2$) és kinetikus energia ($(1/2)\ (M+m)v^2$) összegével:

$$(1/2)DA^2 = (1/2)Dx_0^2, +(1/2)\ (M+m)\ v_0^2.$$

Innen x_0 és v_0 korábban kapott kifejezéseit behelyettesítve:

$$A = \sqrt{\left(\frac{mg}{D}\right)^2 + \frac{2\,ghm^2}{D(M+m)}}.$$

A rezgés fázisszöge x_0 és v_0 osztásából:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\,(\omega x_0/v_0).$$

Dőry István (Bp., Piarista Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A golyó és a tányér harmonikus rezgőmozgásának feltétele, hogy a mozgás során együtt maradjanak. Ha a rezgés gyorsulása valahol nagyobb, mint g, és a golyó nem tapad a tányérra, akkor a golyó elhagyja a tányért, a mozgásban új szakasz kezdődik, melynek során a tányér más frekvenciával rezgést végez, a golyó pedig függőleges hajításnak megfelelően mozog.

2. A megoldásban a rezgés középpontjának meghatározása után nem vettük figyelembe a nehézségi erőteret. Ez azért tehető, mert egy állandó erő csak a rezgés középpontját változtatja meg, de a frekvenciáját nem befolyásolja. Ezt a következőképpen láthatjuk be. Nehézségi erőtérben rugóra függesztett testre felírható a Newton-egyenlet:

$$ma = -Dx - mg,$$

ahol a a gyorsulás és x-et az üres rugó végének nyugalmi helyzetétől mérjük, és fölfelé tekintjük pozitívnak. Ha most a $-mg/D$-től mért kitérést y-nal jelöljük, akkor

$$x = y - mg/D.$$

Figyelembe véve, hogy a gyorsulás független a koordinátarendszer kezdőpontjától, ebből kapjuk:

$$ma = -Dy.$$

Innen leolvasható, hogy az y változó ugyanolyan harmonikus rezgőmozgás szerint változik, mint az x változna a nehézségi erő nélkül.

Belátható az is, hogy energetikai megfontolásokkal is ki lehet küszöbölni a nehézségi erőből származó helyzeti energiát. Írjuk fel a fenti rendszer mechanikai energiáját!

$$(1/2)mv^2 + (1/2)\ Dx^2 + mgx.$$

0 szintnek a megnyújtatlan rugó magasságában nyugvó test energiáját vettük.

Az utolsó két tag teljes négyzetté való alakítása után

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}D\left(x + \frac{mg}{D}\right)^2 - \frac{1}{2}D\left(\frac{mg}{D}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dy^2 - \frac{1}{2}D\left(\frac{mg}{D}\right)^2.$$

Ebből az első két tag azonosítható a „rezgés energiájával” a harmadik tag a nehézségi erőből származó helyzeti és a rugó megnyúlásából adódó rugalmas helyzeti energia összege a nyugalmi helyzetben. Ezt a tagot elhagyhatjuk, ha most 0 szintnek a rugóra függesztett nyugvó test energiáját vesszük. Nem célszerű elhagyni akkor, amikor olyan rezgések energiáját hasonlítjuk össze, amelyeknek a középpontja különböző: ha ugyanis egyszer rögzítettük az energia 0 szintjét, minden energiát ettől kell mérni, és ha az energiamérleg egyik oldalán eltoltuk a 0 szintet, a másikon is ugyanennyivel el kell tolni. Feladatunkban ez nem jelentkezett, mert olyan helyzetek energiáját hasonlítottuk össze, ahol a rezgési középpont ugyanaz volt: az ütközés utáni pillanatban a középponttól mért x_0 kitéréshez tartozó rugalmas és kinetikus energiát a szélső helyzetben a középponttól mért kitéréshez tartozó rugalmas energiával tettük egyenlővé.

A beérkezett dolgozatok nagy részében a hiba onnan eredt, hogy a megoldók nem látták tisztán a nehézségi erő szerepét, és nem tudták következetesen figyelembe venni, vagy következetesen elhagyni. Ezért javasoljuk, hogy a megoldók a fentiek alapján újra gondolják át a megoldásukat.