I. megoldás. Indítsunk el egy testet a vízszintessel α szöget bezáró irányban v_0 kezdősebességgel. t idő múlva ez a test $t \cdot v_0 \cdot \sin\alpha - (g/2) \cdot t^2$ magasságban lesz, a kezdőponttól mért távolságának vízszintes komponense $t \cdot v_0 \cdot \cos\alpha$. Láthatjuk, hogy a test a következő pályán mozog:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

A test akkor találja el a célt, ha a célpont koordinátái $(x_c,\, y_c)$ kielégítik ezt az egyenletet. Így az egyenletből meghatározhatjuk, hogy valamely v_0 kezdősebesség esetén milyen szög alatt kell elindítani a testet, hogy a céltárgyat eltaláljuk. Felhasználva a $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ összefüggést, $\cos^2$ α-ra a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$\cos^4\alpha(x_c^2 + y_c^2) + \cos^2\alpha \cdot x_c^2 \left(\frac{gy_c}{v_0^2} - 1\right) + \frac{g^2 x_c^4}{4v_0^4} = 0.$$

Ennek megoldása:

(1)
$$\cos^2\alpha = \frac{v_0^2 - gy_c \pm \sqrt{v_0^4 - 2gy_c v_0^2 - g^2 x_0^2}}{2\left(v_0^2 + \frac{y_c^2}{x_c^2} v_0^2\right)}.$$

Fizikai tartalommal bíró megoldást csak úgy kaphatunk, ha a gyökjel alatt nemnegatív mennyiség áll. A diszkrimináns akkor nemnegatív, ha

$$v_0^2 \ge g\left(y_c + \sqrt{y_c^2 + x_c^2}\right).$$

Ekkor (1) jobb oldala a $(-)$ előjel mellett 0 és 1/2 közötti szám, tehát van olyan α szög, amelyre (1) teljesül, ezért valóban el tudjuk találni ekkor a tárgyat. Ugyanis egyrészt

$$|v_0^2 - gy_c| \ge \sqrt{v_0^4 - 2gy_c v_0^2 - g^2 x_c^2},$$

hiszen

$$v_0^2 - gy_c > 0 \qquad \text{és} \qquad (v_0^2 - gy_c)^2 \ge v_0^2 - 2gy_c v_0^4 - g^2 x_c^2;$$

másrészt $y_c \ge 0$ esetén nyilván

$$v_0^2 - gy_c < v_0^2 + (y_c^2/x_c^2) v_0^2.$$

Így láthatjuk, hogy a legkisebb sebesség, amivel a céltárgyat eltalálhatjuk:

$$v_{0\min} = \sqrt{g\left(y_c + \sqrt{y_c^2 + x_c^2}\right)}.$$

A feladat numerikus adataival ($y_c = 70$ m, $x_c = 240$ m);

$$v_{0\min} = \sqrt{320 \text{ m} \cdot g} \approx 56 \text{ m/s}.$$

Németh István (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. A vízszintessel α szöget bezáró irányban v_0 kezdősebességgel elindított test pályája:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Akkor találjuk el a célt, ha a célpont koordinátái kielégítik ezt az egyenletet. Ebből a következő összefüggést kapjuk a kezdősebesség és a hajítás iránya közt:

(1)
$$v_0^2 = \frac{g x_c^2}{2x_c \sin\alpha\cos\alpha - 2y_c\cos^2\alpha}.$$

A hajítás kezdősebessége akkor minimális, ha a jobb oldali tört nevezője maximális. Ez azt jelenti, hogy a keresett α szög mellett a nevezőnek mint α függvényének abszolút és egyben helyi szélsőértéke van, tehát a nevező α szerinti deriváltja 0:

$$2x_c \cos 2\alpha + 2y_c \sin 2\alpha = 0.$$

Ez akkor igaz, ha $\operatorname{tg} 2\alpha = -(x_c/y_c)$, így ebből ismerjük a hajítás szögét, (1) segítségével pedig a kezdősebességet is meghatározhatjuk.

A feladat numerikus adataival

$$\alpha_{\min} = 53{,}1^\circ \qquad \text{és} \qquad v_{0\min} \approx 56 \text{ m/s}.$$

Samu Péter (Csongrád, Batsányi J. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Sok megoldó úgy vélte, hogy a cél eltalálásához akkor kell a legkisebb kezdősebesség, ha a lövedék pályája legmagasabb pontján találja el a célt, mások szerint pedig a lövedéket a vízszinteshez képest 45°-os szögben kell kilőni. Mindkét álláspont helytelenségét gyorsan be lehet látni: ha például tőlünk 240 m-re, de velünk egy magasságban van a cél, a lövedék ezt nyilván nem pályája csúcsán találja el; másrészt pedig egy tőlünk 240 m-re, de 250 m magasan levő célt nem lehet eltalálni a vízszinteshez képest 45°-os szög alatt indított lövedékkel.