I. megoldás. Vizsgáljuk egy ellipszispályán haladó tömegpont mozgását. A rá ható erő a pálya minden pontjában felbontható érintőleges és erre merőleges összetevőre. Ha a vizsgált pontban a görbületi sugár ϱ, a kerületi sebesség pedig v, az erő pályára merőleges összetevője

(1) $$F_{\perp} = mv^2/\varrho.$$

Tekintsünk egy olyan „bolygómozgást", ahol az F_1 fókuszpontba helyezett M tömegű nap gravitációs terében a m tömegű bolygó a megfelelő ellipszispályát írja le.

A m tömegű test teljes energiája egy P pontban:

(2) $$E = (1/2)mv^2 - \gamma mM/r_1 = -\gamma mM/a,$$

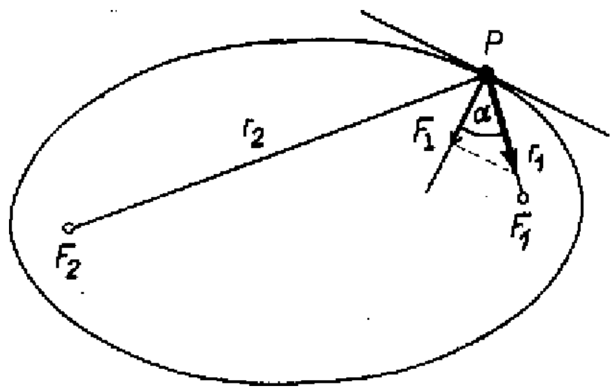
ahol $r_1 = F_1P$, a a fél nagytengely. Innen

(3) $$mv^2 = \gamma mM\big[(2/r_1) - (1/a)\big].$$

A gravitációs erőnek a pillanatnyi sebességre merőleges összetevője:

(4) $$F_{\perp} = (\gamma mM/r_1^2)\cos\alpha,$$

ahol α az r_1 vezérsugár és az érintő által bezárt szög pótszöge (1. ábra).



1. ábra

Az (1) – (4) egyenletekből

$$\varrho = mv^2/F_{\perp} = (r_1^2/\cos\alpha)\,\big[(2/r_1) - (1/a)\big],$$

illetve felhasználva a másik vezérsugárra vonatkozó $r_2 = 2a - r_1$ összefüggést:

(5) $$\varrho = r_1 r_2/(a\,\cos\alpha).$$

$\cos\alpha$ meghatározását tekinthetjük geometriai feladatnak, de továbbhaladhatunk „tisztán" fizikai úton is – a Kepler-törvények segítségével.

Kepler II. törvénye értelmében a területi sebesség állandó:

(6) $$(1/2)r_1 v\,\cos\alpha = \text{áll.} = c.$$

A T keringési idő alatt a rádiuszvektor az egész ellipszis területét végigpásztázza, azaz

(7) $$cT = ab\pi.$$

Kepler III. törvénye szerint a keringési idő csak a fél nagytengelytől függ, tehát egy a sugarú körpályán mozgó test keringési ideje is T. Körpályára:

(8) $$\gamma mM/a^2 = m\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2/a.$$

(6), (7) és (8)-ból T kiküszöbölésével a

(9) $$\gamma M/r_1^2 = (av^2/b^2)\cos^2\alpha$$

egyenlethez jutunk, azaz

$$F_{\perp} = (\gamma mM/r_1^2)\cos\alpha = mv^2(a/b^2)\cos^3\alpha,$$

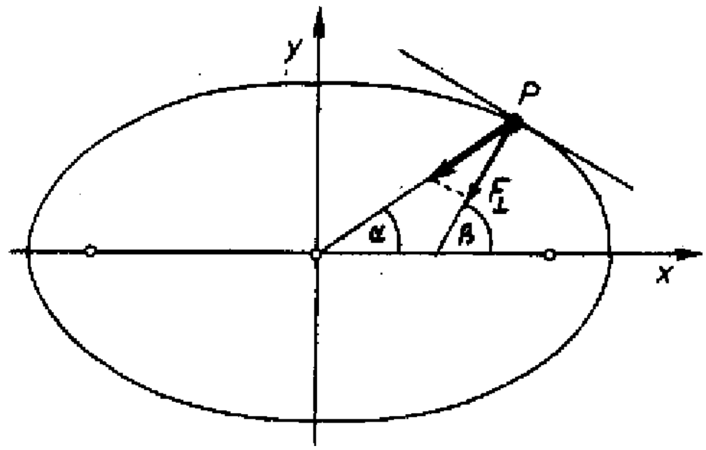
(10) $$\varrho = mv^2/F_{\perp} = b^2/(a\cos^3\alpha).$$

A Kepler-törvények segítségével – más úton – ismét meghatároztuk a görbületi sugarat.

Az (5) és (10) eredmények ismeretében $\cos\alpha$ geometriai meghatározására már nincs szükség. A kétismeretlenes egyenletrendszert ϱ-ra megoldva végeredményül a

$$\varrho = \frac{(r_1 r_2)^{3/2}}{ab} \tag{11}$$

görbületi sugarat kapjuk.



2. ábra

A 2. ábrán látható koordináta-rendszert használva kapjuk:

$$r_1^2 = (c-x)^2 + y^2, \qquad r_2^2 = (c+x)^2 + y^2,$$

így az $a^2 - b^2 + c^2$ azonosság alapján

$$\varrho = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2}. \tag{12}$$

A kérdezett pontokban ϱ rendre 3,6 cm, 16,6 cm, illetve 9,5 cm.

II. megoldás. Vizsgáljuk egy D direkciós erejű rugó végére kötött m tömegű test síkmozgását.

A Newton egyenletet derékszögű koordináta-rendszerben felírva (a mennyiségek fölé írt két pont az idő szerinti második differenciálhányadost jelenti):

$$\begin{aligned} F_x &= -Dx = m\ddot{x}, \\ F_y &= -Dy = m\ddot{y}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ezeknek az egyenleteknek van olyan

$$\begin{aligned} x &= a\sin\omega t, \\ y &= b\cos\omega t, \qquad (\omega = \sqrt{D/m}) \end{aligned} \tag{2}$$

megoldása, amely a kívánt ellipszispályát írja le:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = \sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1.$$

Tehát megfelelő kezdőpontot és kezdeti sebességet választva az m tömegű test a megadott ellipszispályán fog mozogni.

A sebességkomponensek:

$$\begin{aligned} v_x &= a\omega\,\cos\,\omega t, \\ v_y &= -b\omega\,\sin\,\omega t. \end{aligned} \tag{3}$$

Az (x,y) pontban az érintő iránytangense:

$$m = v_y/v_x = -(b/a)\,(\sin\,\omega t/\cos\,\omega t) = -(b^2/a^2)\,(x/y),$$

az erre merőleges egyenes iránytangense a 2. ábra alapján:

$$m' = -(1/m) = (a^2/b^2)\,(y/x) = \mathrm{tg}\,\beta. \tag{4}$$

A rugóerő pályára merőleges komponense a 2. ábra alapján

(5) $$F_\perp = F\cos(\alpha-\beta) = D\sqrt{x^2+y^2}\cos(\alpha-\beta),$$

ahol

(6) $$\operatorname{tg}\alpha = \mathrm{y/x}.$$

A szögfüggvényekre vonatkozó azonosságok felhasználásával

$$\cos(\alpha-\beta) = \left[(x^2+y^2)\,(x^2/a^4+y^2/b^4)\right]^{-1/2},$$

azaz

(7) $$F_\perp = \frac{D}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}}}.$$

A görbületi sugár meghatározásához még szükség van a sebesség négyzetére. (3)-ból

(8) $$v^2 = \omega^2(a^2\cos^2\omega t + b^2\sin^2\omega t) = \omega^2 a^2 b^2\left[(x^2/a^4)+(y^2/b^4)\right].$$

A görbületi sugár tehát az ellipszis (x,y) pontjában:

(9) $$\varrho = \frac{mv^2}{F_\perp} = \frac{m\omega^2}{D}a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2} = a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2}.$$

Nagy Győző (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., II. o. t.)