

A feladatban szereplő ideális gáz molszámát az adatok már meghatározzák. Az állapotegyenletből:

$$m/M = n = p_1 V_1 / RT_1.$$

A felvett hő megállapításához az I. főtételt használjuk:

$$U_B - U_A = Q + W_{\text{külső}},$$

ahol $W_{\text{külső}}$ a külső erők munkája. A gáz által végzett munkát az AB görbe alatti terület adja meg. Ezek szerint:

$$W_{\text{külső}} = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1).$$

A továbbiakban célszerű a cal/mol fok egységekben mért fajhőt, az ún. molhőt használnunk. (Ennek számértéke az egy mol anyag által egységnyi hőmérsékletnövekedés következtében felvett hőt adja meg, jele C .) Képletben

$$(1) \quad \Delta Q = C \cdot (m/M) \cdot \Delta T,$$

ahol ΔQ a kicsiny ΔT -hez tartozó hőfelvétel. Általános esetben C függhet a hőmérséklettől. Az ideális gáz rögzített térfogathoz tartozó állapotváltozása esetén azonban tudjuk, hogy $C = \text{állandó} = C_v$. Az I. főtétel szerint ilyenkor $\Delta Q = \Delta U = C_v (m/M) \Delta T$. A belső energia állapotjelző, ezért minden folyamatra igaz, hogy

$$U_B - U_a = C_v (m/M) (T_B - T_A).$$

Az állapotegyenletet is fölhasználva

$$\Delta U = (C_v/R)(p_2 V_2 - p_1 V_1).$$

A folyamat során felvett teljes hő tehát

$$Q = \Delta U - W_{\text{külső}} = (C_v/R)(p_2 V_2 - p_1 V_1) + (1/2)(p_1 + p_2)(V_2 - V_1).$$

A molhő kiszámításakor nem járhatunk el úgy, hogy a fenti hőt osztjuk a $(T_2 - T_1)$ hőmérsékletkülönbséggel, hiszen semmi sem biztosítja azt, hogy a molhő állandó legyen. A T hőmérsékletű állapothoz tartozó molhőt úgy kell meghatározunk, hogy megvizsgáljuk, kis ΔT hőmérsékletváltozás hatására az adott $p(V)$ egyenletű állapotváltozás során mekkora a felvett ΔQ hő, s ezek ismeretében az (1) egyenlet szerint

$$C(T) = (M/m)(\Delta Q/\Delta T).$$

Az első főtétel alapján kifejezzük a kis ΔQ mennyiséget:

$$\Delta Q = C_v (m/M) \Delta T + p \Delta V.$$

Ezt behelyettesítve, a következő általános összefüggést kapjuk:

$$(2) \quad C(T) = C_v + \frac{M}{m} \cdot p(T) \frac{\Delta V(T)}{\Delta T}.$$

Az általunk vizsgált konkrét folyamat $p(V)$ lineáris függvény:

$$(3) \quad p(V) = p_1 + k(V - V_1), \quad \text{ahol } k = \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}.$$

Ha ezt behelyettesítjük az állapotegyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$[p_1 + k(V - V_1)]V = (m/M)RT.$$

V -t kifejezve meghatározzuk a térfogat hőmérséklettől való függését:

$$(4) \quad V(T) = -a + \sqrt{a + bT},$$

ahol

$$a = \frac{p_1}{2k} - \frac{V_1}{2}, \quad b = \frac{mR}{Mk}.$$

$\Delta V/\Delta T$ -t kell még meghatározunk:

$$\Delta V = \sqrt{a + b(T + \Delta T)} - \sqrt{a + bT} = \sqrt{(a + bT) \left(1 + \frac{b\Delta T}{a + bT}\right)} - \sqrt{a + bT}.$$

ΔT nagyon kicsi, ezért alkalmazhatjuk a

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2), \quad x \ll 1$$

összefüggést, így

$$\Delta V = \sqrt{a+bT} + \sqrt{a+bT} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b\Delta T}{a+bT} - \sqrt{a+bT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b\Delta T}{\sqrt{a+bT}}.$$

$\sqrt{a+bT}$ -t kifejezzük (4)-ből, és ezzel

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{1}{2} \frac{(m/M)(R/k)}{V + (p_1/2k) - (V_1/2)} = \frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{R}{kV + (1/2)(p_1 - kV_1)}.$$

p -t behelyettesítve, $C(T)$ -re a következő összefüggést kapjuk:

$$C(T) = C_v + \frac{kV(T) + p_1 - kV_1}{kV(T) + (1/2)(p_1 - kV_1)} \cdot \frac{1}{2}R.$$

$C(T)$ tehát nem állandó, hiszen V a (4) egyenlet szerint függ a hőmérséklettől.

Abban a speciális esetben, ha a $p(V)$ egyenes átmegy az origón, tehát ha $p(0) = 0$,

$$p_1 - kV_1 = 0,$$

s ilyenkor

$$C = C_v + (1/2)R$$

a hőmérséklettől függetlenül.

Tél Tamás

Megjegyzések. 1. Az általánosan érvényes (2) egyenletből könnyen megkapható a $C_p - C_v = R$ összefüggés is. Izobár változásokra ugyanis $p\Delta V = (m/M)R\Delta T$, s ezt behelyettesítve $C_p = C_v + R$.

2. A megoldások között több nagyon alapvető hiba is előfordult. Az egyik a hőmérséklet és a hő fogalmának összekeverése! A másik gyakori hiba az volt, hogy a megoldók egy része az AB állapotváltozás helyett egy izobár és egy izochor folyamat összegét vizsgálta. A belső energia állapotjelző, ezért a belső energia szempontjából a két változás egyenértékű. A hő (és a munka) azonban nem állapotjelző, különböző $p(V)$ függvényekkel leírható állapotváltozásokra egészen más értékeket vesz föl a kezdő és végállapotot összekötő pályától függően. Az ezeket a hibákat elkövető versenyzők nem kaptak pontot.