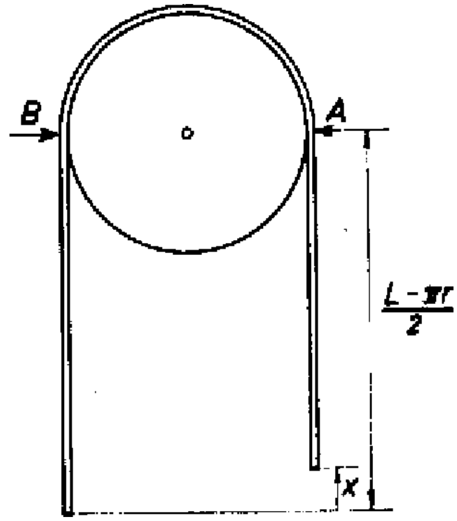
Ebben az esetben is használható az 1975. évi tanulmányi verseny II. fordulójának 2. feladatára adott megoldás gondolatmenete (K. M. L. 51 (1975) 85).

Tekintsük változónak a kötél végének a kezdettől megtett x útját. Az eredetileg lelógó darabok hossza (1. ábra):



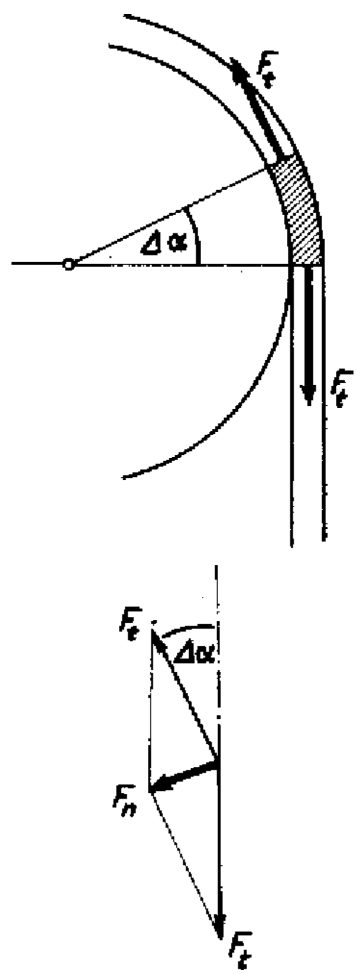
1. ábra

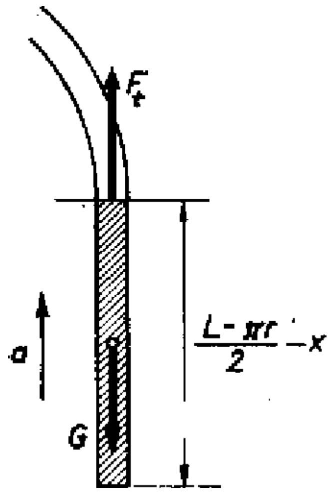
$$\frac{L-\pi r}{2}.$$

A kötél az A pontban akkor válik el a hengertől, ha az A pont előtt levő infinitezimálisan kicsiny darabjára ható normális irányú erő egyenlővé válik a körpályán haladáshoz szükséges centripetális erővel:

$$\frac{\Delta m v^2}{r} = F_n. \tag{1}$$

Egy $\Delta\alpha$ középponti szöghöz tartozó köteldarab tömege $\sigma \cdot \Delta\alpha \cdot r$ (σ az egységnyi hosszú kötél tömege), és a rá ható erő (2. ábra):





2 ábra

$$F_n = 2F_t \ \sin\ \Delta\alpha/2 \approx F_t \cdot \Delta\alpha.$$

Tehát az (1) feltételből a következőt kapjuk:

$$\sigma v^2 = F_t. \tag{2}$$

F_t az az erő, amely a lelógó $\sigma\left(\frac{L-\pi r}{2} - x\right)$ tömegű köteldarabot a nehézségi erő ellenében fölfelé gyorsítja a gyorsulással:

$$F_t - \sigma\left(\frac{L-\pi r}{2} - x\right)g = \sigma\left(\frac{L-\pi r}{2} - x\right)a;$$

ebből

$$F_t = \sigma\left(\frac{L-\pi r}{2} - x\right)(g+a). \tag{3}$$

A kötél sebessége és gyorsulása a megtett út függvényében a következő módon kapható meg.

Az energiamegmaradás alapján

$$\sigma x g x = (1/2)L\sigma v^2 + (1/2)\Theta\omega^2,$$

ahol $\Theta = (1/2)mr^2$ a henger tehetetlenségi nyomatéka, ω aszögsebessége. Mivel teljes a tapadás, $\omega = v/r$. Így

$$v = \left(\frac{2\sigma g}{\sigma L + m/2}\right)^{1/2} x; \tag{4}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{2\sigma g}{\sigma L + (m/2)}\right)^{1/2} v = \frac{2\sigma g}{\sigma L + (m/2)} x. \tag{5}$$

(2), (3), (4), és (5) összevetéséből kapjuk:

$$\frac{2\sigma^2 g}{\sigma L + (m/2)} x^2 = \sigma\left(\frac{L-\pi r}{2} - x\right)\left(g + \frac{2\sigma g \cdot x}{\sigma L + (m/2)}\right). \tag{6}$$

Ez az egyenlet x-re megoldható, és pozitívgyöke adja a mozgás megkezdésétől a kötél elválásáig megtett utat:

$$x = -\frac{(m/2) + \pi r\sigma}{8\sigma} + \sqrt{\left(\frac{(m/2) + \pi r\sigma}{8\sigma}\right)^2 + \frac{(L-\pi r)(\sigma L + (m/2))}{8\sigma}}.$$

Tornóci László (Tata, Eötvös J. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A (6) egyenlet negatív megoldása azt az x-et adja meg, amelynél a B pontban válik el a kötél (ha ellenkező irányban mozog a kötél, az A és B pont szerepe felcserélődik). Ez az x nagyobb (abszolút értékben), mint a feladat megoldásában szereplö. Ennek oka, hogy adott helyzetben a B pontban nagyobb az F_t, mint az A-ban (a kettő különbségének forgatónyomatéka gyorsítja a hengert a tengelye körül), míg a v^2/r ugyanaz mindkét pontban.

2. A második ábrán F_t-vel jelölt erők nem pontosan egyformák; eredőjük tangenciális komponense nem 0, ez gyorsítja a köteldarabot és ez ad járulékot a henger gyorsításához is. A két erő különbsége $\Delta\alpha$ nagyságrendű, így F_n-ben $(\Delta\alpha)^2$ nagyságrendű járulékot ad, (2) $\Delta\alpha$ nagyságrendű taggal módosulna, amely elhagyható.