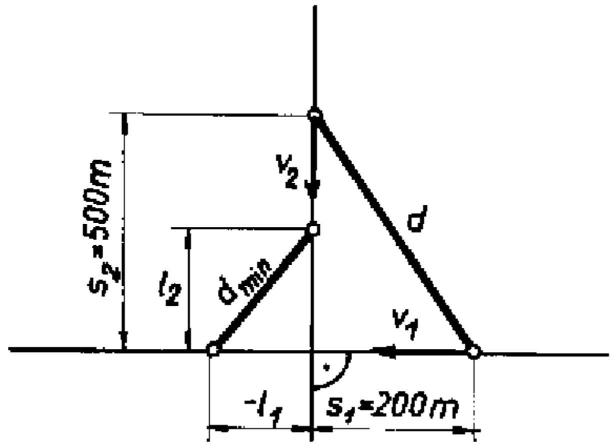
Írjuk fel a két autó távolságát az idő függvényében (l. az 1. ábrát):



1. ábra

$$d=\sqrt{(s_1-v_1t)^2+(s_2-v_2t)^2}.$$

Ha d minimális, akkor d^2 is az, tehát elég a gyökjel alatti kifejezés minimumának a helyét és értékét megkeresni. A négyzetre emelést elvégezzük és a kapott másodfokú polinomot teljes négyzetté alakítjuk:

$$d^2=(v_1^2+v_2^2)t^2-2(s_1v_1+s_2v_2)t+(s_1^2+s_2^2=$$
$$=(v_1^2+v_2^2)\left[t-\left(\frac{s_1v_1+s_2v_2}{v_1^2+v_2^2}\right)\right]^2+\left(s_1^2+s_2^2-\frac{(s_1v_1+s_2v_2)^2}{v_1^2+v_2^2}\right).$$

A második tag nem függ az időtől, az első tag értéke pedig vagy pozitív vagy 0. d^2 akkor minimális, amikor az első tag eltűnik, azaz

$$t=\frac{s_1v_1+s_2v_2}{v_1^2+v_2^2}.$$

Ekkor

$$d_{\min}^2=s_1^2+s_2^2-\frac{(s_1v_1+s_2v_2)^2}{v_1^2+v_2^2}=\frac{(s_1v_2-s_2v_1)^2}{v_1^2+v_2^2},$$
$$d_{\min}=\frac{(s_1v_1-s_2v_2)}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

Számadatainkkal :

$$t=22{,}15\text{ sec},\qquad d_{\min}=305\text{ m}.$$

A kocsik távolsága ekkor a kereszteződéstől

$$l_1=s_1-v_1t=-169\text{ m},\qquad l_2=s_2-v_2t=254\text{ m}.$$

l_1 negatív volta azt jelenti, hogy a kocsi túlhaladt a kereszteződésen.

Samu Péter (Csongrád, Batsányi J. Gimn., II. o. t.)

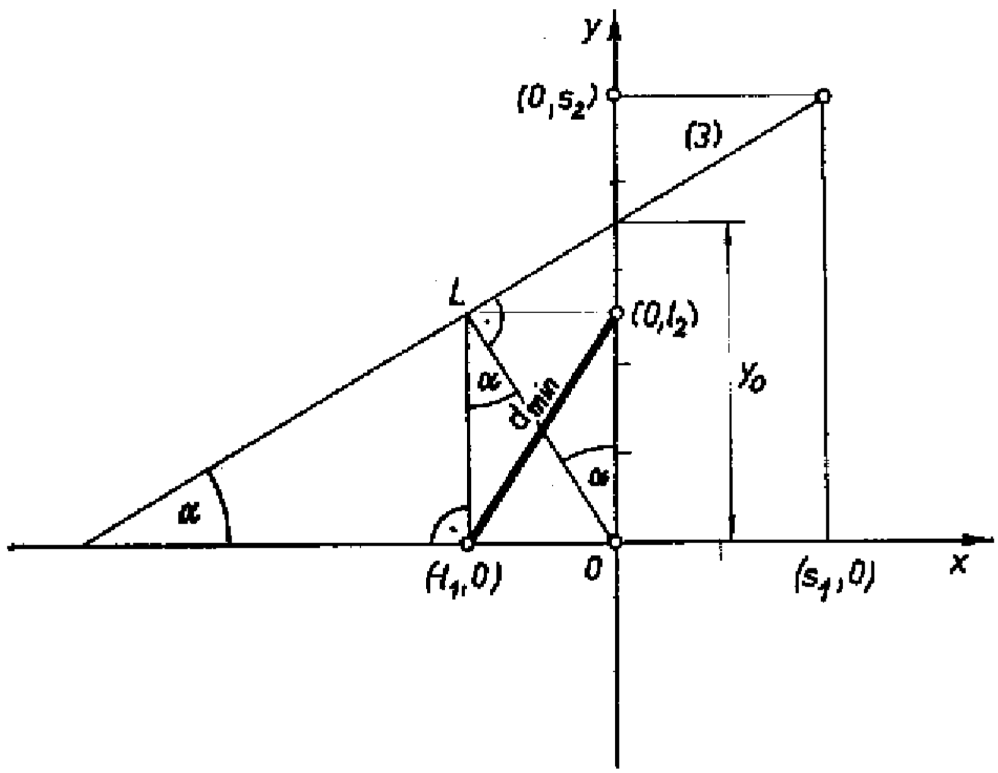
II. megoldás. Tekintsük az útkereszteződést derékszögű koordinátarendszernek! A távolságokat mérjük úgy, hogy a megadott helyzetben az első autó koordinátái legyenek $(s_1;\,0)=(200\text{ m};\,0)$, a másodikéi pedig $(0;\,s_2)=(0;\,500\text{ m})$. A koordináták az idő függvényében

(1) $$x_1=s_1-v_1t,\qquad y_1=0;$$

(2) $$x_2=0,\qquad y_2=s_2-v_2t.$$

x_1 és y_2 segítségével t-t kiküszöböljük:

(3) $$y_2=s_2-v_2\left(\frac{s_1-x_1}{v_1}\right)=x_1\frac{v_2}{v_1}+\frac{s_2v_1-s_1v_2}{v_1}.$$



2. ábra

A kapott kifejezés egy egyenest ír le (2. ábra), amely megadja a második autó helyzetét az elsőével: az egyenes bármely pontjának x–koordinátája megfelel az első autó egy helyzetének, az y–koordinátája pedig a másodikénak ugyanabban az időpillanatban. A két autó távolsága egyenlő a pontnak az origótól mért távolságával: a két autó helyét összekötő szakasz és az OL szakasz ugyanannak a téglalapnak a két átlója. A minimális távolság a (3) egyenes távolsága az origótól. Ez az ábra segítségével meghatározható.

$$\text{tg}\ \alpha = v_2/v_1 = 2/3,$$
$$y_0 = s_2 - (v_2/v_1)s_1,$$
$$d_{\min} = y_0 \cos \alpha,$$
$$l_2 = d_{\min} \cdot \cos \alpha;$$
$$l_1 = -d_{\min} \cdot \sin \alpha.$$

Az időpont, amelyben ez bekövetkezik, akár az (1), akár a (2) egyenlet segítségével meghatározható $x_1 = l_1$ vagy $y_2 = l_2$ helyettesítéssel.

Bagi Barnabás (Barcs, Gimn. és Vízügyi Szakközépisk., II. o. t.)