Centrális térben történő mozgáskor az energia és az impulzusmomentum mozgásállandó. A Föld gravitációs terében haladó m tömegű, v sebességű űrhajó teljes energiája

$$(1/2)mv^2 - fMm/r = E, \tag{1}$$

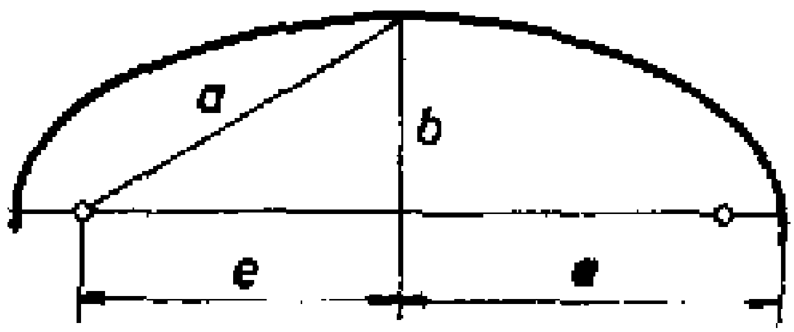
impulzusmomentuma:

$$mrv \sin\varphi = N, \tag{2}$$

ahol φ az $\mathbf{r}$ helyvektor és a $\mathbf{v}$ sebességvektor által bezárt szög.

Kezdeti feltételként ismerve a teljes energiát és az impulzusmomentumot, (1) és (2) segítségével meghatározható a pálya alakja, a hely és a sebesség minden időpontban. Zárt pálya esetén a Kepler–törvények is közvetlenül adódnak a megoldásból.

A rövidség kedvéért tekintsük ismertnek Kepler I. törvényét, azaz hogy ha $E < 0$, az űrhajó pályája ellipszis (1. ábra).



1. ábra

Az (1) és (2) összefüggést csupán az ellipszispálya adatainak meghatározására használjuk fel.

Ha az űrhajó sebessége Földközelben $v_{\max}$, a legtávolabbi pontban $v_{\min}$, a teljes energia ebben a két pontban:

$$E = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 - \frac{fMm}{a-e} = \frac{1}{2}mv_{\min}^2 - \frac{fMm}{a+e}. \tag{3}$$

Mivel a két szélső esetben $\mathbf{v} \perp \mathbf{r}$, ezekben a pontokban az impulzusmomentum:

$$N = m(a-e)v_{\max} = m(a+e)v_{\min}, \tag{4}$$

A (3) és (4) egyenleteket $v_{\max}$-ra megoldva:

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{fMm}{2a} - \frac{a+e}{a-e}, \tag{5}$$

amit (3)-ba visszahelyettesítve a teljes energia:

$$E = -fMm/2a. \tag{6}$$

Ez az egyenlet – azon a felismerésen túl, hogy a teljes energia a pálya adatai közül csupán a nagytengelytől függ – az (1) egyenletbe téve fontos összefüggést jelent:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{fMm}{r} = -\frac{fMm}{2a}, \tag{7}$$

vagy átrendezve:

$$v^2 = fM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \tag{8}$$

Az indítási pontban $r_0 = 2 \cdot 10^7$ m, $v_0 = 6 \cdot 10^3$ m/s, és így (8) segítségével a fél nagytengely:

$$a = \frac{fMr_0}{2fM - r_0v_0^2} = 10 \cdot 10^7 \text{ m}. \tag{9}$$

Mivel

$$r_0 = a - e, \qquad \text{illetve} \qquad e = 8 \cdot 10^7 \text{ m}, \tag{10}$$

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = 6 \cdot 10^7 \text{ m}. \tag{11}$$

(8) alapján a kistengely végpontjában (ahol $r = a$) az űrhajó sebessége

$$v_1 = \sqrt{fM\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a}\right)} = 2 \cdot 10^3 \text{ m/s}. \tag{12}$$

Az m_1 tömegű űrhajó $v_1 = 2 \cdot 10^3$ m/s sebességgel halad, amikor az m_2 tömegű, $v_2 = -0{,}5 \cdot 10^3$ m/s sebességű meteorral ütközik. Centrális, rugalmas ütközést feltételezve, az ütközés utáni sebességek:

$$u_1 = 2\,\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1 = +0{,}75 \cdot 10^3 \text{m/s}, \tag{13}$$

$$u_2 = 2\,\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2 = +3{,}25 \cdot 10^3 \text{m/s}. \tag{14}$$

(Pozitív iránynak az űrhajó ütközés előtti sebességét választottuk.)

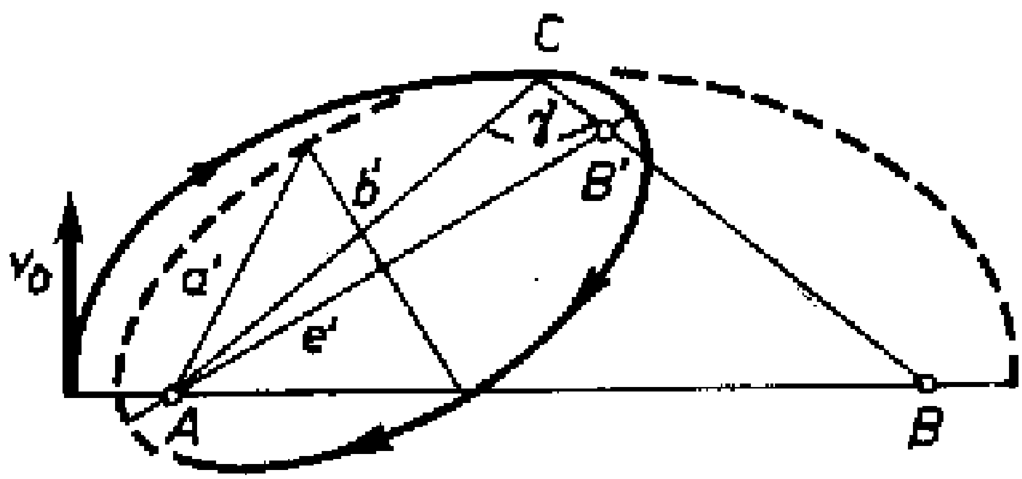
Az űrhajó sebessége – így energiája is – csökken, továbbra is ellipszisszis pályán halad. Az új pálya fél nagytengelye α', (8) alapján

$$u_1^2 = fM\big[(2/a) - (1/a')\big], \tag{15}$$

ahonnan

$$a' = 5{,}38 \cdot 10^7 \text{ m}. \tag{16}$$

A sebesség irányának egyenese mindig a pálya érintője. Mivel centrális ütközésnél ezen egyenes iránya nem változik, az eredeti és az új pálya az ütközési pontban közös érintővel rendelkezik (2. ábra).



2. ábra

Az érintőszerkesztés szabályai szerint az új ellipszispálya második fókusza az eredeti ellipszis második fókuszához vezető vezérsugáron van.

Az új pálya e' excentricitásának, b' fél kistengelyének meghatározása – a 2. ábra alapján – egyszerű geometriai feladat. Az ellipszis mértani hely tulajdonságát felhasználva

$$AC + CB' = 2a', \tag{17}$$

másrészt ismerjük az

$$AC = a, \quad AB' = 2e', \quad AB = 2e \tag{18}$$

távolságokat. A cosinus tételt alkalmazva az ABC, illetve az $AB'C$ háromszögekre:

$$\begin{aligned}(2e)^2 &= a^2 + a^2 - 2a\ a \cos\gamma,\\ (2e')^2 &= a^2 + (2a' - a)^2 - 2a(2a' - a)\cos\gamma.\end{aligned} \tag{19}$$

Innen

$$e' = \sqrt{(2e^2 - a^2)\left(\frac{a'}{a} - \frac{1}{2}\right) + \frac{a^2}{4} + \left(a' - \frac{a}{2}\right)^2} = 5{,}12 \cdot 10^7 \text{ m}. \tag{20}$$

Az új pálya fél kistengelye:

$$b' = \sqrt{a'^2 - e'^2} = 1{,}65 \cdot 10^7 \text{ m.} \tag{21}$$

Az új pályán az űrhajó legkisebb távolsága a Föld középpontjától $r_{\min} = = a' - e' = 2{,}6 \cdot 10^6$ m lenne, ami kisebb, mint a Föld sugara. Az űrhajó a Földbe csapódik.

Vizsgáljuk a meteor mozgását! Az ütközés előtt az energiája az (1) összefüggés alapján

$$E_{meteor} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{fMm_2}{a} = -3{,}875 \cdot 10^9 \text{ J} < 0 \tag{22}$$

volt, azaz szintén ellipszispályán keringett a Föld körül. Ütközés után

$$E'_{meteor} = \frac{1}{2} m_2 u_2^2 - \frac{fMm_2}{a} = 1{,}28 \cdot 10^9 \text{ J} > 0 \tag{23}$$

energiával fog rendelkezni; a meteor hiperbolapályájára kerül.

Szathmári Attila (Debrecen, Fazekas M. Gimn., IV. o. t.) és
Zelhofer Walter (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján