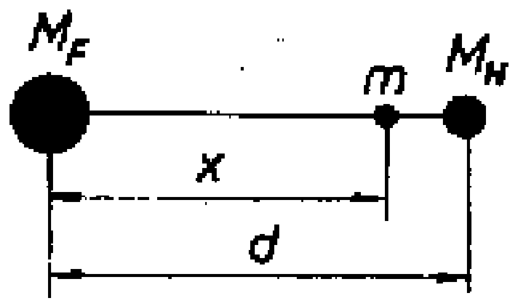
Olyan mesterséges égitestet akarunk létrehozni, mely a Holdnak ugyanazon pontja fölött található. Mivel a Holdnak mindig ugyanaz az oldala fordul a Föld felé, ez csak úgy lehetséges, hogy a mesterséges égitest egy olyan mesterséges hold, amely a Hold pályasíkjában, a Holdéval megegyező szögsebességel kering a Föld körül.

A Föld–Hold rendszer tömegközéppontja közel esik a Föld középpontjához, így nem követünk el nagy hibát, ha úgy számolunk, mintha a Hold az álló Föld középpontja körül körpályán keringene. A mesterséges égitestet csak a Föld és a Hold középpontját összekötő centrálison helyezhetjük el, mivel a rá ható erők eredőjének a Föld középpontja felé kell mutatnia. Három helyzet lehetséges (1–3. ábra).

a) Az m tömegű mesterséges hold a Föld és a Hold között, a Földtől x távolságra helyezkedik el (1. ábra).



1. ábra

A körmozgáshoz szükséges centripetális erőt a Föld és a Hold vonzóerejének eredője biztosítja:

$$f\,\frac{M_F m}{x^2} - f\,\frac{M_H m}{(d-x)^2} = m x \omega^2. \tag{1}$$

ω megegyezik a Hold szögsebességével, így a Holdra vonatkozó hasonló egyenletből határozható meg:

$$f\,\frac{M_F M_H}{d^2} = M_H d \omega^2. \tag{2}$$

A két egyenletből ω-t kiküszöbölve

$$\frac{M_F}{x^3} - \frac{M_H}{(d-x)^2 x} = \frac{M_F}{d^3},$$

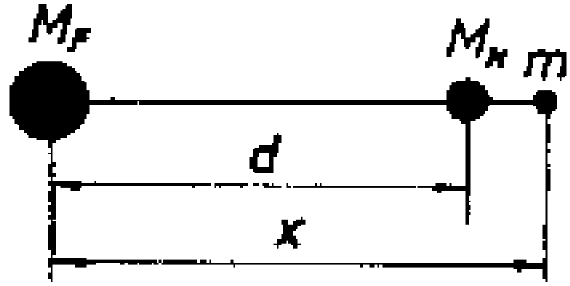
$M_F/M_H = c \approx 81{,}3$ és $x/d = \alpha$ helyettesítéssel

$$c - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 = c\alpha^3. \tag{3}$$

Ennek az egyenletnek 0 és 1 közé eső gyökét valamilyen közelítő módszerrel kereshetjük meg. c numerikus értékét behelyettesítve (3)-at így is írhatjuk:

$$81{,}3 = 81{,}3\alpha^3 + \left[\frac{1}{1-\alpha} - 1\right]^2.$$

Ennek az egyenletnek a jobb oldalán álló kifejezés a $[0,\,1)$ intervallumban α-nak szigorúan monoton növekedő függvénye, a függvény értéke $\alpha = 0$ esetén 0, $\alpha = 1$-ben a baloldali határértéke pedig $+\infty$. Ezért a szóbanforgó folytonos függvény a $[0,\,1)$ intervallumban pontosan egy helyen felveszi a 81,3 értéket, azaz a fenti egyenletnek pontosan egy gyöke van a $[0,\,1)$ intervallumban. Közelítő számítással a gyökre $\alpha \approx 0{,}849$ adódik, tehát a mesterséges égitest a Föld középpontjától $3{,}27 \cdot 10^5$ km, a Hold középpontjától $0{,}58 \cdot 10^5$ km távolságra kering.



2. ábra

b) Ha a mesterséges hold a Hold túlsó oldalán van (2. ábra), az (1) egyenlet a következő alakot ölti:

$$f\,\frac{M_F m}{x^2}+f\,\frac{M_H m}{(x-d)^2}=mx\omega^2. \tag{4}$$

(2) felhasználásával és az előbbi helyettesítésével

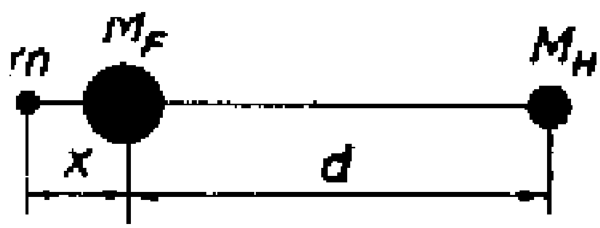
$$c+\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2=c\alpha^3 \tag{5}$$

egyenlet adódik, amelynek 1-nél nagyobb megoldása $\alpha\approx 1{,}168$. (Az a tény, hogy (5)-nek pontosan egy 1-nél nagyobb gyöke van, (5) alábbi alakjából következik a fentiekhez hasonló módon:

$$\frac{81{,}3}{\alpha^3}+\frac{1}{\alpha(\alpha-1)^2}=81{,}3.$$

Tehát a szinkron mesterséges hold a Hold túlsó oldalára a Földtől $4{,}50\cdot 10^5$ km, a Holdtól $0{,}65\cdot 10^5$ km távolságra is elhelyezhető.

c) A mesterséges hold elvileg elhelyezhető a Földnek a Holddal átellenes oldalán is (3. ábra).



3. ábra

Ekkor

$$f\,\frac{M_F m}{x^2}+f\,\frac{M_H m}{(d+x)^2}=mx\omega^2, \tag{6}$$

ahonnan (2) felhasználásával

$$c+\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^2=c\alpha^3. \tag{7}$$

Megoldva az egyenletet, $\alpha\approx 1{,}001$, adódik, tehát a Hold hatása gyakorlatilag elhanyagolható, a mesterséges hold a Holdénál alig nagyobb sugarú pályán kering.

Vancsó Ödön (Gödöllő, Török I. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Vizsgáljuk meg, mennyire változtatja meg az eredményeket, ha figyelembe vesszük, hogy a Hold és a mesterséges hold nem a Föld középpontja, hanem a Föld–Hold rendszer tömegközéppontja körül kering (a mesterséges hold tömege a Föld és a Hold tömegéhez képest elhanyagolható).

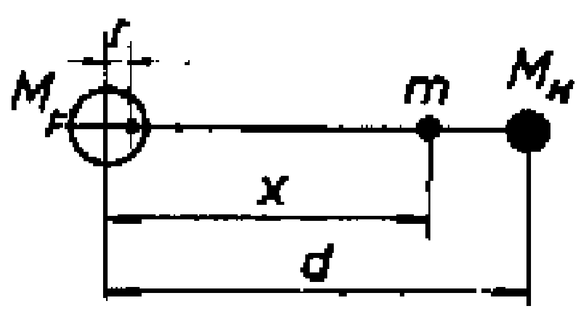
Legyen a tömegközéppont r távolságra a Föld középpontjától. Ekkor

$$M_F/M_H=(d-r)/r, \tag{8}$$

ahonnan

$$\beta=r/d=1/(1+c). \tag{9}$$

Vizsgáljuk meg pl. azt az esetet, amikor a mesterséges hold a Föld és a Hold között helyezkedik el (4. ábra).



4. ábra

Ekkor az (1)-nek és (2)-nek megfelelő egyenletek

(10) $$f\,\frac{M_F m}{x^2} - f\,\frac{M_H m}{(d-x)^2} = m(x-r)\omega^2,$$

(11) $$f\,\frac{M_F M_H}{d^2} = M_H(d-r)\omega^2.$$

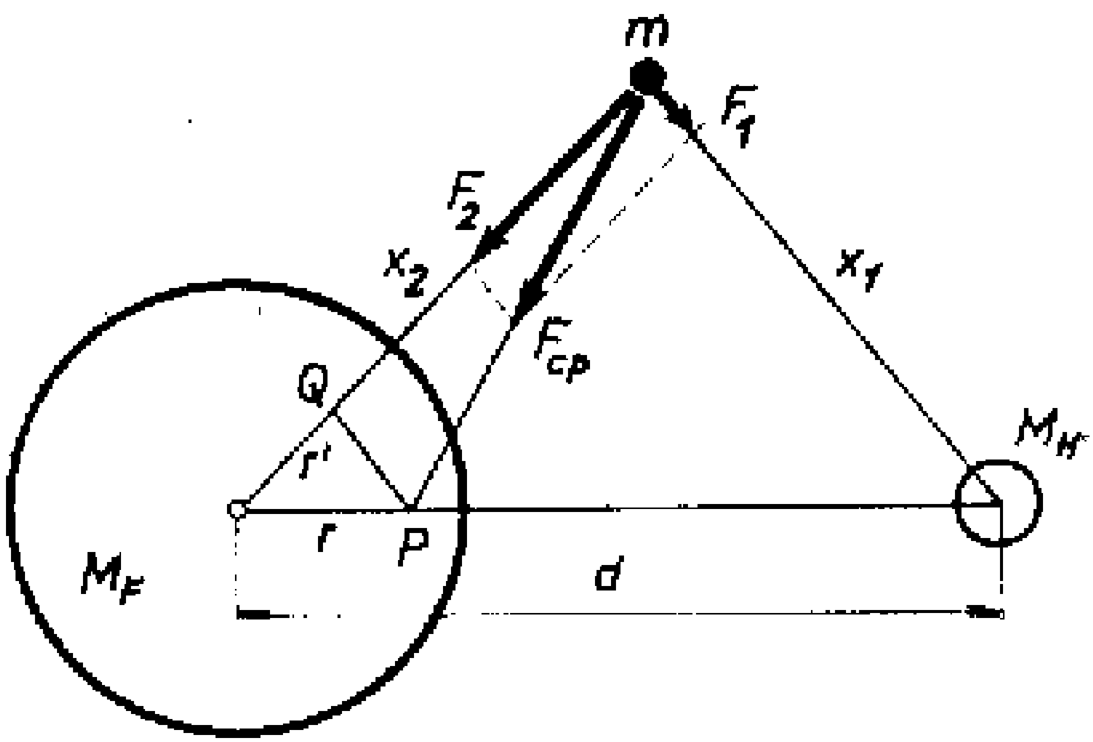
ω-t kiküszöbölve $\alpha = x/d$-re az alábbi egyenlet adódik:

(12) $$c\left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\right) - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\right) = c\alpha^2\frac{\alpha}{1-\beta},$$

amelynek megoldása – $\alpha \approx 0{,}851$ – alig tér el az r elhanyagolásával kapott $\alpha \approx 0{,}849$ értéktől. A másik két helyzetben az eltérés még kisebb.

Kisvárdai László József (Csongrád, Batsányi J. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

2. Ha figyelembe vesszük, hogy a mesterséges égitest nem a Föld, hanem a középpontjától r távolságra levő tömegközéppont körül kering, akkor a gravitációs erők eredője akkor is mutathat a középpont felé, ha a Föld, a Hold és a mesterséges hold nem esik egy egyenesbe (5. ábra).



5. ábra

Legyen PQ párhuzamos a Holdat a mesterséges égitesttel összekötő egyenessel. Ekkor

(13) $$r'/r = x_2/d,$$

$r = d/(1+c)$ felhasználásával

(14) $$r' = x_2/(1+c).$$

Háromszögek hasonlóságából

(15) $$\frac{F_2}{Fcp} = \frac{x_2 - r'}{x}.$$

$F_2 = fM_F m/x_2^2$, $F_{cp} = mx\omega^2$, így (15)-ből (14)-et is felhasználva

$$\frac{f\,\dfrac{M_F m}{x_2^2}}{mx\omega^2} = \frac{x_2 - \dfrac{x_2}{1+c}}{x},\quad \text{ahonnan}$$

$$x_2^3 = \frac{fM_F(1+c)}{c\omega^2}.$$

ω-t (11)-ből behelyettesítve

$$x_2 = d$$

adódik. Hasonlóan belátható, hogy $x_1 = d$, vagyis a mesterséges hold úgy is elhelyezhető a Hold pályasíkjában, hogy a Földdel és a Holddal egyenlő oldalú háromszöget alkosson. Természetesen két ilyen helyzet lehetséges.

Faragó Béla (Csongrád, Batsányi J. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján