A henger forgatásakor a súlyerőt a testre ható centrifugális erő helyettesíti. (A hengerrel együttforgó koordináta-rendszerből írjuk le a helyzetet.) Az ebből származó gyorsulás a tengelytől való távolság függvényében $a = r \cdot \omega^2$. A paláston

$$R\omega^2 = g,$$

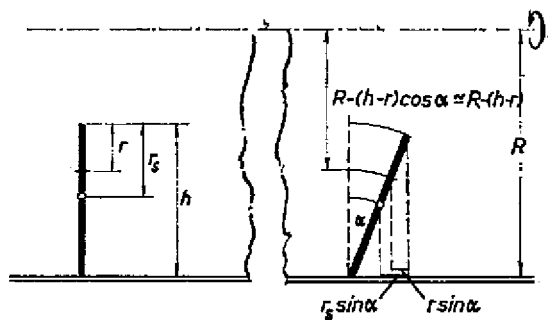
tehát

$$\omega = \sqrt{g/R} = 0{,}99\,1/\mathrm{s} \sim 1\,1/\mathrm{s}.$$

A rúd súlyának a kiszámításához osszuk fel a rudat olyan kis Δr hosszúságú darabokra, hogy azok hosszán belül a „nehézségi” gyorsulás változása már elhanyagolható legyen! Ekkor a test súlya úgy írható fel, hogy

$$G = \lim_{\Delta r \to 0} \Sigma a(r_i)\Delta m = \lim_{\Delta r \to 0} \Sigma(R - h + r_i)\omega^2 \varrho \Delta r A =$$
$$= \int_0^h (R - h + r)\omega^2 A\varrho \,\mathrm{d}r = m\omega^2 R(1 - h/2R) = 9\,\mathrm{kp},$$

(ahol A a keresztmetszet, ϱ a sűrűség).



Egy test súlypontján a testre ható súlyerő támadáspontját értjük. Más szóval, ha a G erő itt támad, akkor a forgatónyomatéka egyenlő a rúd egyes részeire ható erők forgatónyomatékainak az összegével (l. a megjegyzést). A koordináta-rendszer kezdőpontjának a rúdnak a tengelyhez közelebbi végét véve nyerjük:

$$G \cdot r_s = \lim_{\Delta r \to 0} \Sigma(R - h + r_i)r_i\omega^2 \varrho A\Delta r =$$
$$= \int_0^h (R - h + r)r\omega^2 A\varrho \,\mathrm{d}r = A\varrho\omega^2\big[(R - h)(h^2/2) + h^3/3\big],$$

innen

$$r_s = \frac{h}{2}\frac{(1 - h/3R)}{(1 - h/2R)} = 28/27\,\mathrm{m} \approx 1{,}037\,\mathrm{m}.$$

Tehát a rúd súlypontja a henger palástjától, azaz a „talajtól” 0,963 méterre van.

Lájer Konrád (Tapolca, Batsányi J. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Számos megoldó rosszul értelmezte a súlypont fogalmát. A legáltalánosabb hiba az volt, hogy a súlypontot és a tömegközéppontot (a továbbiakban *sp* ill. *tkp*) azonosnak vették, illetve a két fogalmat összekeverték, és a *tkp*-ra vonatkozó tételeket sem alkalmazták helyesen.

A *tkp* definíció szerint az a pont, amelynek a helyvektora $r_{tkp} = \dfrac{\Sigma m_i r_t}{\Sigma m_i}$. Erről tudjuk, hogy úgy mozog, mintha a rendszer egész tömege ebbe a pontba lenne sűrítve, és a rendszerre ható külső erők ΣF_k eredője erre a pontra hatna. Ezt például felhasználhatjuk a G meghatározásához: a homogén rúd *tkp*-ja a felében van, ez a pont a kényszerek miatt egy $\big(R - (h/2)\big)$ sugarú körpályán mozog, tehát $G = \Sigma F_k = \big(R - (h/2)\big)\omega^2 m$. De hibás az az okoskodás, hogy az m tömegű $\big(R - (h/2)\big)$ helyen levő tömegpontra $\big(R - (h/2)\big)\omega^2 m$ erő hat, tehát a súly $\big(R - (h/2)\big)\omega^2 m$. Példánkban ugyanazt az eredményt kapjuk, de ez csak a gyorsulás lineáris helyfüggésének köszönhető. Ha azonban a nehézségi gyorsulás helyfüggése más, mint pl. gravitációs erőtérben nagy távolságok esetén, az említett gondolatmenet rossz eredményre vezet. A helyes okoskodás a következő: $g(r) = \gamma M_F/r^2$, így a Föld középpontja felé mutató rúd súlya

$$\gamma M_F A\varrho \int_R^{R+h} (1/r^2)\mathrm{d}r = \frac{mM_F\gamma}{R(R+h)} \neq \frac{M_F m\gamma}{\big[R + (h/2)\big]^2}.$$

Itt jól látszik, hogy a rendszerre ható külső erők kiszámítását és a tömegek *tkp*-ba való sűrítését nem szabad fölcserélni.

A *sp* szabatos definiálása helyfüggő erőtérben, amilyen példánkban is szerepel, nehéz. Ha ugyanis úgy definiáljuk, hogy a súlyvonalak metszéspontja, akkor esetleg nem is kapunk egy pontot: a test forgatásával az erők nagysága is megváltozhat, és így a súlyvonalak több metszéspontot is adhatnak. A legkézenfekvőbb meghatarozás az, amit a feladat megoldásában adtunk, de ez önmagában még nem teljes: az eredő erő a hatásvonalában eltolható, ettől a forgatónyomatéka nem változik, tehát a hatásvonal minden pontja vehető a súlyerő támadáspontjának. Belátható, hogy a testet kicsi (!) szöggel elforgatva a súlyerő új és régi hatásvonalának a metszéspontja első közelítésben a szögtől független. Ezt a pontot nevezhetjük az adott helyzetben a test *sp*-jának. Ez a meghatározás hasonlít a homogén térben célszerű meghatározáshoz, de itt lényeges, hogy a súlyvonalak szöge kicsiny. Példánkban a rúd függőleges helyzetében a súlyerő hatásvonala a rúd tengelye. A rudat kicsi a szöggel elforgatva, a rúd egyes pontjainak a tengelytől való távolsága csak α-ban másodrendben változik, így az erők nagyságának a változása elhanyagolható. Az új helyzetben felírható forgatónyomaték-egyenletből a szögfüggvény kiesik (l. az ábrát), így lapjuk a megoldásban felírt egyenletet.

Sok megoldó úgy okoskodott, hogy a *sp*-on átmenő síkok a testet azonos súlyú részekre osztják. Ez még homogén erőtérben is csak speciális esetekben igaz: gondoljunk két különböző tömegű test közös *sp*-jára: az valahol a két test között a tengelyen van, és a *sp* két oldalán a testek súlya különböző.

Woynasrovich Ferenc