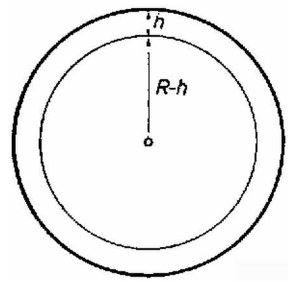
A nehézségi gyorsulás a Föld felszínén, a középponttól $R$ távolságban

$$g(R) = G/m = kM/R^2,$$

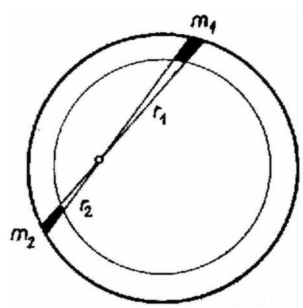
ahol $k$ a gravitációs állandó, $M$ pedig a Föld tömege, amely az átlagsűrűséggel kifejezve

$$M = (4/3)R^3\pi \cdot \varrho_{\text{átlag}}.$$

Egy $h$ mélységű akna fenekén a nehézségi gyorsulás két tag összegeként kapható meg. Egyrészt egy $(R-h)$ sugarú, a teljes Földnél kisebb tömegű gömb gravitációs terét kell meghatároznunk, másrészt figyelembe kell vennünk egy $h$ vastagságú gömbhéj hatását (1. ábra).




*1. ábra*




*2. ábra*

Az utóbbiról könnyen beláthatjuk, hogy nulla. Ha ugyanis a gömbhéjat olyan vékony rétegekre bontjuk, hogy a 2. ábrán látható $m_1$ és $m_2$ csonkakúpszerű anyagdarabok már tömegpontoknak tekinthetők, akkor a geometriai hasonlóság miatt

$$m_1/m_2 = (r_1/r_2)^2,$$

és így a szemben fekvő részek eredő gravitációs vonzóereje

$$k(m_1/r_1^2) - k(m_2/r_2^2) = 0.$$

Elegendő tehát egy $(R-h)$ sugarú gömbbel foglalkoznunk. Ennek felszínén a nehézségi gyorsulás

$$g(R-h) = k \cdot M_1/(R-h)^2,$$

ahol $M_1$ a Föld össztömegénél nyilván

$$(4/3)\pi[R^3 - (R-h)^3]\varrho_{\text{kéreg}}$$

értékkel kevesebb.

Ha a numerikus adatokkal kiszámítjuk $g(R)$ és $g(R-h)$ értékét, a négyjegyű függvénytáblázat pontosságáig azonosnak találjuk ezek számértékét. De még ha ki is tudjuk számítani a különbséget, ez nagyon pontatlan eredmény lesz, hiszen két közel azonos nagyságú szám különbségének relatív hibája mindig sokkal nagyobb, mint az eredeti számok relatív hibája.

Hogy a fenti problémát megkerüljük, határozzuk meg közvetlenül $g(R) - g(R-h)$ értékét, anélkül, hogy $g(R)$-et vagy $g(R-h)$-t külön-külön kiszámítanánk.

Azonos átalakításokkal a korábbi képletekből

$$g(R) - g(R-h) = g(R) \cdot \frac{h}{R} \frac{3\varrho_{\text{kéreg}}\left(1 - \dfrac{h}{R} + \dfrac{h^2}{3R^2}\right) - 2\varrho_{\text{átlag}}\left(1 - \dfrac{h}{2R}\right)}{\varrho_{\text{átlag}}\left(1 - \dfrac{2h}{R} + \dfrac{h^2}{R^2}\right)}$$

adódik.

Mivel $h = 1000$ m, $R = 6300$ km, ezért $h/R$ és $h^2/R^2$ 1 mellett nyugodtan elhanyagolható. Azért elegendő ezrelék pontossággal számolni, mert most közvetlenül a különbséget határozzuk meg, nem pedig egy részeredményt.

A feladat számadataival

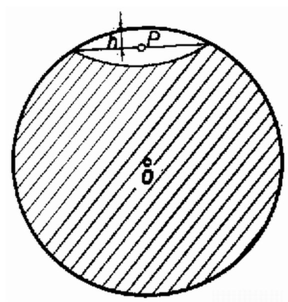
$$g(R) - g(R-h) = 10\ \mathrm{m/s^2} \cdot \frac{1}{6300} \cdot \frac{3 \cdot 3 - 2 \cdot 5{,}5}{5{,}5} =$$
$$= -5{,}6 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m/s^2}.$$

Ennyivel nő a nehézségi gyorsulás, ha egy bánya mélyén mérjük. A növekedés abból származik, hogy bár kisebb tömeg vonzását kell figyelembe vennünk, de közelebb kerültünk a geometriai középponthoz. Tovább haladva lefelé, $g$ mindaddig nő, amíg $3\varrho < 2\varrho_{\text{átlag}}$, vagyis míg a sűrűség el nem éri az alattunk levő rész átlagsűrűségének 2/3-át.

*Horváth Gyula* (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján

*Megjegyzések.* 1. A forgás miatt a nehézségi gyorsulás az Egyenlítőn $R\omega^2 - (R-h)\omega^2 = h\omega^2 \approx 10^{-7}$ m/s$^2$ értékkel csökken, ez valóban elhanyagolható a fentebbi számítás eredménye mellett.

2. Sok megoldó úgy próbálta meghatározni az aknában mérhető nehézségi erőt, hogy az egész Föld gravitációs tere helyett a 3. ábrán metszetben látható csonkított gömb terét vették csak figyelembe, hiszen a két eltávolított gömbszelet tere a $P$ pontban nyilván nulla.




*3. ábra*

A maradék tömege és súlypontja az adatokból meghatározható. Ez idáig helyes. A hibát ott követték el, hogy a csonkított gömb gravitációs terét úgy számolták, mintha egész tömege a tömegközpontjában helyezkedne el, holott ez csak gömbszimmetrikus testeknél jogos eljárás. Két tömegpont gravitációs tere az egyikhez egészen közel például sokkal nagyobb, mintha mindketten a közös súlypontban helyezkednének el.