a) Rugalmatlan ütközés: Jelöljük a részecskék nyugalmi tömegét m_1 és m_2-vel, ütközés előtti sebességüket v_1-gyel és v_2-vel. Használjuk továbbá a $k = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ jelölést.

A rendszer összes impulzusa

$$I = m_1 k_1 v_1 + m_2 k_2 v_2,$$

összes energiája pedig

$$E = m_1 k_1 c^2 + m_2 k_2 c^2.$$

Az ütközés során a két test összetapad és egyetlen m tömegű, u sebességű részecskeként mozog tovább. Vigyáznunk kell, m nem egyszerűen $(m_1 + m_2)$, hiszen az ütköző testek mozgási energiája is növeli a rendszer energiáját és a $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ összefüggésnek megfelelően a tömegét is. Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy érvényes az energiamegmaradás, csak éppen a megnövekedett tömeggel:

$$m_1 k_1 c^2 + m_2 k_2 c^2 = m k' c^2, \tag{1}$$

továbbá az impulzusmegmaradás

$$m_1 k_1 v_1 + m_2 k_2 v_2 = m k' u, \tag{2}$$

ahol $k' = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$.

(2) és (1) egyenletek hányadosából kapjuk, hogy

$$u = \frac{m_1 k_1 v_1 + m_2 k_2 v_2}{m_1 k_1 + m_2 k_2}.$$

Azt találtuk, hogy a végsebesség a kezdeti sebességek súlyozott középértéke, csak amíg a klasszikus mechanikában a súlyfaktorok a nyugalmi tömegek, addig itt a megnövekedett relativisztikus tömegek.

Speciális esetként vegyük egyenlő tömegek ütközését $v_1 = (4/5)c$ és $v_2 = (3/5)c$ értékekkel. Ekkor $k_1 = 5/3$, $k_2 = 5/4$, u pedig $0{,}714\,c$, szemben a klasszikus mechanika $0{,}7\,c$ értékével.

b) Rugalmas ütközés: Ha a részecskék ütközés utáni sebességét v_3 és v_4-gyel jelöljük, akkor az energia- és impulzusmegmaradás törvénye szerint

$$m_1 k_1 c^2 + m_2 k_2 c^2 = m_1 k_3 c^2 + m_2 k_4 c^2, \tag{3}$$

$$m_1 k_1 v_1 + m_2 k_2 v_2 = m_1 k_3 v_3 + m_2 k_4 v_4. \tag{4}$$

Ebből az egyenletrendszerből meghatározhatjuk v_3 és v_4 értékét. (3)-ból kifejezve $m_1 k_3$-at, majd ebből v_3-at:

$$m_1 k_3 = m_1 k_1 + m_2 k_2 - m_2 k_4,$$

$$v_3 = c\sqrt{1 - \frac{1}{k_3^2}}.$$

Ezeket a kifejezéseket (4)-be helyettesítve olyan egyenletet kapunk, amely v_4-re nézve másodfokúra redukálható. Az egyik megoldás a nyilvánvaló $v_4 = v_2$, $v_3 = v_1$, ez azonban valódi ütközésnél nem lehetséges. A másik gyök adja a feladat valódi megoldását.

Speciális esetként nézzük meg egyenlő tömegek rugalmas ütközését. (3) és (4) egyenleteket nyilván kielégíti a $v_3 = v_2$, $v_4 = v_1$ megoldás, tehát a klasszikus mechanikához hasonlóan a sebességcsere itt is fellép.

Ha $m_2 \gg m_1$ és $v_2 = 0$, akkor $v_3 = -v_1$ lesz, vagyis a nagy tömegű testről a kis tömegű test ugyanakkora nagyságú, ellentétes sebességgel pattan vissza.

Szathmári Attila (Debrecen, Fazekas M. Gimn., IV. o. t.) és *Vass Albert* (Csongrád, Batsányi J. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján.