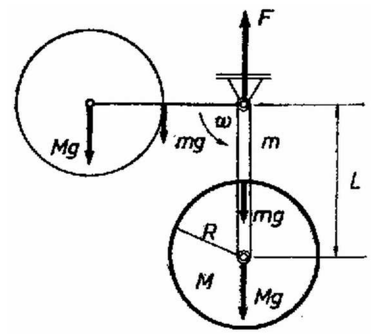
A felfüggesztő csuklóban ható F erő az L hosszúságú, m tömegű rúdból és az M tömegű korongból álló inga körpályán tartásához szükséges centripetális erőt szolgáltatja, továbbá a rendszer súlyával tart egyensúlyt.



Így az inga függőleges helyzetében:

$$F = mg + Mg + m(L/2)\omega^2 + ML\omega^2.$$

Az inga ω szögsebességét az energiamegmaradás elve segítségével határozhatjuk meg. Az ω szögsebességgel forgó inga mozgási energiája $(1/2)\Theta\omega^2$ (ahol Θ az inga tehetetlenségi nyomatéka a felfüggesztési pontra vonatkoztatva). Ez az energia az inga kezdeti és pillanatnyi helyzeti energiájának különbségével egyenlő:

$$(1/2)\Theta\omega^2 = MgL + mgL/2.$$

Innen

$$\omega^2 = \frac{Lg(2M+m)}{\Theta}.$$

Ennek ismeretében a csuklóerő:

$$F = (m+M)g + \frac{(2M+m)^2L^2g}{2\Theta}.$$

a) Ha a korong csapágyazása ideális, a szabadon elforduló korongra nem hathat forgatónyomaték. A korongot így a súlypontjában elhelyezett M tömegű tömegponttal helyettesíthetjük. Az inga tehetetlenségi nyomatéka így ebben az esetben a rúd és a tömegpont tehetetlenségi nyomatékának összege:

$$\Theta = ML^2 + mL^2/3.$$

Ennek felhasználásával:

$$\omega^2 = \frac{3g(2M+m)}{L(3M+m)}, \quad \text{és} \quad F = (m+M)g + \frac{3g(2M+m)^2}{6M+2m}.$$

A feladat számadataival:

$$F \approx 17{,}3 \text{ kp}.$$

b) Az inga tehetetlenségi nyomatéka most a korong és a rúd tehetetlenségi nyomatékának összege. A beékelt korongnak a felfüggesztési pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka a Steiner-tétel segítségével:

$$\frac{MR^2}{2} + ML^2, \quad \text{így} \quad \Theta = ML^2 + \frac{mL^2}{3} + \frac{MR^2}{2}.$$

Ebben az esetben tehát

$$\omega^2 = \frac{6gL(2M+m)}{L^2(6M+2m)+3MR^2} \quad \text{és} \quad F = (m+M)g + \frac{3gL^2(2M+m)^2}{L^2(6M+2m)+3MR^2}.$$

Numerikusan

$$F \approx 16{,}1 \text{ kp}.$$

Pátkai György (Békéscsaba, Rózsa F. Gimn., III. o. t.)