A gömb középpontjában a nyomás a felületi feszültségből származó görbületi nyomásból és a hidrosztatikai nyomásból tevődik össze.

A görbületi nyomás egy R sugarú, α felületi feszültségű folyadékgömbnél (l. például az 1248. sz. feladat megoldását)

$$p_g = 2\alpha/R.$$

A hidrosztatikai nyomás egy h vastagságú, ϱ sűrűségű folyadékrétegnél g gravitációs gyorsulás esetén

$$p = \varrho \cdot g \cdot h.$$

Feladatunkban az okoz problémát, hogy a nehézségi gyorsulás a folyadékgömb középpontja felé haladva egyre csökken. A középponttól r távolságra egységnyi tömegre

$$g(r) = f\frac{(4/3)r^3\pi\varrho}{r^2} \tag{1}$$

erő hat, ugyanis az r sugarú gömb tömege $(4/3)r^3\pi\varrho$, az r-nél távolabb elhelyezkedő részek gravitációs térerőssége pedig – a töltött fémgömb elektromos teréhez hasonlóan – nulla.

Osszuk fel a gömböt olyan vékony gömbrétegekre, hogy egy rétegen belül $g(r)$ változása már elhanyagolható legyen. Ekkor a Δr vastag rétegek hidrosztatikai nyomásának összege

$$p_h \approx \Sigma\varrho \cdot g(r) \cdot \Delta r,$$

amely a felosztás finomításával a

$$p_h = \int\limits_0^R \varrho g(r)\mathrm{d}\,r$$

integrálhoz tart. (1) felhasználásával

$$p_h(R) = (4/3)\pi \cdot f \cdot \varrho^2 \cdot \int\limits_0^R r\,\mathrm{d}r = (2/3)\pi \cdot f \cdot \varrho^2 \cdot R^2,$$

a teljes nyomás pedig p_g és p_h összege

$$p(R) = 2\alpha/R + (2/3)\pi f\varrho^2R^2.$$

Ennek a függvénynek keressük a minimumát. A minimum szükséges feltétele, hogy az első derivált

$$p'(R) = -2\alpha/R^2 + (4/3)\pi f\varrho^2R = (2/3R^2)(2\pi/\varrho^2R^3 - 3\alpha) \tag{2}$$

nulla legyen, ahonnan

$$R = R_0 = \sqrt[3]{\frac{3\alpha}{2f\pi\varrho^2}}.$$

(2)-ből jól látható, hogy $R > R_0$ esetén $p'(R) > 0$, tehát ekkor a $p(R)$ függvény nő; $R < R_0$ esetén $p'(R) < 0$, tehát ekkor a $p(R)$ függvény fogy. Ezért a nyomásnak az $R = R_0$ értékénél valóban minimuma van.

A feladat számadataival $R_0 = 6{,}95\ \ \mathrm{m} \approx 7\ \ \mathrm{m}$, a gömb átmérője tehát 14 m. Az olajgömb középpontjában a nyomás $1{,}4 \cdot 10^{-6}\ \ \mathrm{kp/cm}^2$.

Sparing László (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., IV. o. t.)