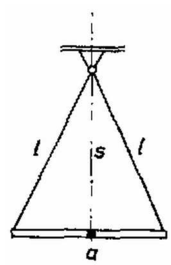
Tegyük fel, hogy a rudat tartó fonalak végig feszített állapotban vannak! (Ez a feltevés teljesül, ha a kitérés nem túl nagy.) Ekkor a rendszer mindkét esetben fizikai ingának tekinthető, amelynek lengésideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}\,,$$

ahol $\Theta$ a felfüggesztő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték, $s$ a tengely és a súlypont távolsága, $m$ az inga tömege, $g$ pedig a nehézségi gyorsulás.




Az ábra alapján

$$s = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

A tehetetlenségi nyomaték Steiner tételének felhasználásával

$$\Theta = (1/12)(\varrho \cdot a) \cdot a^2 + (\varrho \cdot a) \cdot (l^2 - a^2/4),$$

ahol $\varrho$ a hosszegységre jutó tömeg. A vízszintes rúd tömege:

$$m = \varrho a.$$

Behelyettesítve

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{6l^2 - a^2}{3g\sqrt{4l^2 - a^2}}}.$$

Geometriai okokból $a < 2l$, tehát mindkét négyzetgyökjel alatt pozitív szám áll.

A három rúdból álló fizikai ingánál a súlypont helyzetét legegyszerűbben a forgástengelyre felírt forgatónyomatéki egyenletből határozhatjuk meg.

$$(\varrho l + \varrho l + \varrho a)g \cdot s' = \varrho l \cdot g \cdot s/2 + \varrho l \cdot g \cdot s/2 + \varrho a \cdot g \cdot s.$$

Átrendezéssel és $\varrho g$-vel való egyszerűsítéssel kapjuk, hogy

$$s' = s\frac{a + l}{a + 2l}.$$

A tehetetlenségi nyomaték most

$$\Theta' = \Theta + 2 \cdot (1/3)\varrho l^3,$$

a teljes tömeg

$$m' = \varrho l + \varrho l + \varrho a.$$

Behelyettesítve a lengésidő képletébe:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{4l^3 + 6al^2 - a^3}{3g\sqrt{4l^2 - a^2} \cdot (a + l)}}.$$

Ez a mennyiség ismét független a hosszegységre jutó tömegtől.

*Katus Gábor* (Budapest, Apáczai Csere J. Gimn., IV. o. t.)