I. megoldás. *a)* Egy r sugarú szappanbuborék felszíne (a hártya mindkét oldalát figyelembe kell vennünk) $2\cdot 4r^2\pi$. Az α felületi feszültség a felületegységre jutó energiát adja meg, ezért a teljes felületi energia $E(r)=8r^2\pi\alpha$. Növeljük meg gondolatban a gömb sugarát egy kicsiny Δr értékkel. Ekkor a felületi energia megváltozása (a $(\Delta r)^2$-et tartalmazó tagot elhanyagolva), közelítőleg

$$E(r+\Delta r)-E(r)=16r\pi\alpha\cdot\Delta r.$$

Ha a buborék belsejében a külső p_0 légnyomáshoz képest p túlnyomás van, akkor a Δr sugárnövekedéskor végzett tágulási munka

$$p\cdot 4r^2\pi\cdot\Delta r.$$

A buborék teljes energiájának megváltozása

$$(16r\pi\alpha-4r^2\pi p)\Delta r.$$

Amennyiben a zárójelben álló kifejezés nem volna nullával egyenlő, akkor az előjelétől függően pozitív vagy negatív sugárváltozással egy alacsonyabb helyzeti energiájú állapotba juthatna a buborék. Az egyensúly feltétele tehát, hogy a zárójelben álló kifejezés 0 legyen, azaz

(1) $$p=4\alpha/r.$$

A fenti számításban kihasználtuk, hogy kicsiny térfogatváltozás esetén a belső nyomás megváltozásától eltekinthetünk,

b) A buborékra vitt elektromos töltések taszítják egymást, ezért a gömb sugara megnő. Jelöljük a p_0 belső nyomáshoz tartozó buboréksugarat R-rel. Amennyiben a tágulás állandó hőmérsékleten történik, alkalmazhatjuk a Boyle–Mariotte törvényt:

$$(p_0+p)\frac{4r^3\pi}{3}=p_0\frac{4R^3\pi}{3},$$

ahonnan (1) felhasználásával

(2) $$R=r\sqrt[3]{1+\frac{4\alpha}{rp_0}}.$$

Határozzuk meg, mekkora töltés tud egy R sugarú buborékon egyensúlyt tartani a felületi feszültség összehúzó erejével. Ha a gömbön Q töltés van, ez $U=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ potenciált jelent, vagyis a gömb kapacitása

$$C=Q/U=4\pi\varepsilon_0 R.$$

Egy C kapacitású testen Q töltésnek

$$W=(1/2)QU$$

energiája van. (Az 1/2-es szorzótényező onnan adódik, hogy a test feltöltése során a feszültség fokozatosan, a töltéssel arányosan növekszik nulláról U-ra, átlagosan $U/2$-nek vehető.) Ezt az energiát a töltéssel és a gömb sugarával is kifejezhetjük:

$$W=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

A sugár kicsiny ΔR-rel történő megváltozásakor az elektromos energia

$$\Delta W=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R+\Delta R}-\frac{1}{R}\right)\approx-\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\Delta R$$

értékkel változik, a felületi energia pedig az előbbiek szerint $16\pi R\alpha\Delta R$-rel. A nyomás a buborékon belül és kívül megegyezik, ezért tágulási munka nincsen.

A teljes energia megváltozása nulla kell, hogy legyen:

$$\left(-\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}+16\pi R\alpha\right)\Delta R=0,$$

ahonnan

(3) $$Q=\sqrt{128R^3\pi^2\varepsilon_0\alpha}.$$

Az ennek megfelelő potenciál

$$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\sqrt{\frac{8\alpha R}{\varepsilon_0}}.$$

a buborék eredeti sugarával kifejezve, (2) alapján a következőt kapjuk:

$$U=\sqrt{\frac{8\alpha r}{\varepsilon_0}}\sqrt[6]{1+\frac{4\alpha}{p_0 r}}.$$

Simor Árpád (Pécs, Széchenyi I. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján

II. megoldás. A feladatot megoldhatjuk úgy is, hogy megkeressük az erőegyensúly feltételét.

a) Célszerű a felületi feszültségnek azt a definícióját használni, miszerint α a felületen húzott vonaldarab hosszegységére eső húzóerővel egyenlő.

Osszuk fel a buborékot két félgömbre! Ezeket a belső nyomás el akarja távolítani egymástól, a felületi feszültség viszont összetartja. A két félgömb $2 \cdot 2r\pi$ hosszon érintkezik egymással (nem szabad elfelejtenünk, hogy a hártyának két oldala van), a felületi feszültség tehát $F_1 = 4r\pi\alpha$ erőt fejt ki. A p túlnyomás egy r sugarú félgömböt $F_2 = r^2\pi p$ erővel nyom, hiszen ha a félgömböt egy síkkal lezárjuk, akkor a körlapra ható erő egyensúlyt tart a félgömbre ható erővel.

Az egyensúly feltétele $F_1 = F_2$, vagyis

$$p = \frac{4\alpha}{r}.$$

b) Vizsgáljuk meg, milyen erők tartják egyensúlyban az R sugarú, Q töltésű szappanbuborékot! A teljes buborékra ható elektromos erők eredője szimmetriaokokból nyilván nulla. Hasonlóan a felületi feszültségből származó erők is szimmetrikusan kiejtik egymást, ha az egész gömböt vizsgáljuk. Célszerű tehát a gömbfelület egy kicsiny darabját – mondjuk ΔA nagyságút – választanunk és az erre a részre ható erők egyensúlyát fogjuk megvizsgálni.

Az elektromos térerősség a gömb külső felületén a Coulomb–törvény értelmében

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Mivel a teljes $4R^2\pi$ felületen a Q töltés egyenletesen oszlik el, ΔA felületre $\Delta Q = \dfrac{Q}{4R^2\pi}\Delta A$ töltés jut. Erre a töltésre E nagyságú elektromos erőtérben

$$F_3 = \Delta Q \cdot E = \frac{Q^2}{16R^4\pi^2\varepsilon_0}\,\Delta A \tag{4a}$$

taszítóerő hat, amellyel a felületi feszültségből származó

$$F_4 = p \cdot \Delta A = \frac{4\alpha}{R}\Delta A$$

nagyságú, sugárirányban befelé mutató erő tart egyensúlyt. A két erő egyenlőségéből a töltésre

$$Q = \sqrt{64R^3\pi^2\varepsilon_0\alpha}$$

adódik, ami $\sqrt{2}$-ször kisebb, mint az I. megoldás megfelelő eredménye!

A hibát ott követtük el, hogy feltételeztük: a ΔQ töltés homogén E erősségű elektromos erőtérben helyezkedik el. A valóságban a szappanhártyát feltöltő elektromos töltés, amely a külső felületen helyezkedik el – bár igen vékony – véges vastagsággal rendelkezik és a térerősség csak a külső oldalán egyenlő E-vel, belül nulla. Befelé haladva a térerősség fokozatosan csökken, a legbelső töltés már nulla térerősségű helyen van, a térerősség átlagosan $E/2$-nek vehető. Így (4a) helyett a helyes összefüggés

$$F_3 = \frac{1}{2}E \cdot \Delta Q = \frac{Q^2}{32R^4\pi^2\varepsilon_0} \cdot \Delta A, \tag{4b}$$

ami már (3)-mal azonos eredményt ad.

A számítás a továbbiakban megegyezik az I. megoldás megfelelő részével.

Béky Loránd (Eger, Gárdonyi G. Gimn., III. o. t.) és
Györgyi Géza (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Az $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ helyett gyakran használják a k jelölést, amelynek közelítő értébe $9 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$ MKSA egységrendszerben.

A teljes egzaktság kedvéért meg kell jegyeznünk, hagy az MKSA rendszerben μ_0, és ε_0 értérét a *következő egyenletekkel definiáljuk:*

$$\mu_0 = \frac{4\pi}{10^7}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \approx 1{,}256\ 637 \cdot 10^{-6}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2}\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}} \cdot \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}},$$

ahol c a fénysebesség vákuumban. Ezek szerint μ_0 értéke véglegesen (tetszőleges pontossággal) rögzített, ε_0 értéke pedig annak megfelelően *változik,* hogy milyen pontossággal tudjuk c-t mérni.

Ha megelégszünk a $c \approx 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m\ s^{-1}}$ pontossággal,

$$\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} \approx 8{,}8419 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}, \quad \mathrm{k} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} :$$

A pontos $c \approx 2{,}997925 \cdot 10^8\,\mathrm{m\ s^{-1}}$ értékkel viszont:

$$\varepsilon_0 \approx 8{,}8542 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}},$$
$$k \approx 8{,}9876 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}.$$

Bár numerikusan csak igen kis különbségekről van szó, mivel azonban ez a különbség elvi, szükségesnek tartottuk ezt az ismertetést, annál is inkább, mert a jelenleg használatos Függvénytáblázatban is hol az egyik, hol a másik érték szerepel.

Bodó Zalán

2. A víz felületi feszültsége $\alpha = 0{,}073$ N/m. Egy $r = 1$ cm sugarú szappanbuboréknál a (2) egyenletben a köbgyök alatt 1,003 áll, ami nagyon jó közelítésben egynek vehető. Ez annyit jelent, hogy reális méretű buborékoknál olyan kicsiny a görbületi nyomás a külső légnyomáshoz képest, hogy a térfogatváltozás (R és r különbözősége) teljesen elhanyagolható. A feladatban szereplő U potenciál néhány cm-es buborékméretnél 10^4 V nagyságrendű.

3. Az 1. és 2. megoldás összevetéséből is láthatjuk, hogy a „legkisebb energiájú állapotba való törekvés elve”, vagy a kicsiny, képzeletbeli Δr elmozdulással történő számítás (virtuális munka elve) nem egy önálló, a Newton–egyenletektől független mechanikai törvény, hanem azokból levezethető, azok következménye.