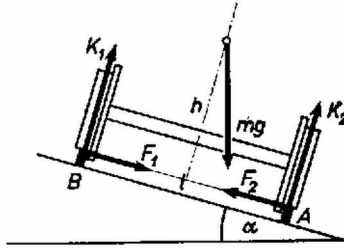


A vonatra a súlyerőn kívül csak az egyes síneknél ébredő  $K_1$ ,  $F_1$ , ill.  $K_2$ ,  $F_2$  nagyságú kényszererők hatnak (1. ábra).



1. ábra

Ezek hatására mozog a kocsí az  $R$  sugarú körpályán  $v$  sebességgel; ezért ezen erők eredője a kör középpontja felé mutató, vízszintes irányú,  $F = mv^2/R$  nagyságú erő.

Komponensekre felbontva:

$$(1) \quad F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \alpha + K_1 \sin \alpha + K_2 \sin \alpha = mv^2/R,$$

$$(2) \quad mg + F_1 \sin \alpha - F_2 \sin \alpha - K_1 \cos \alpha - K_2 \cos \alpha = 0.$$

Mindaddig, amíg a kocsí nem billen fel, a súlypontra vonatkoztatott forgatónyomatékok összege nulla:

$$(3) \quad K_1 l/2 - K_2 l/2 - F_1 h + F_2 h = 0.$$

Lényeges, hogy a forgatónyomatékokat a súlypontra számoljuk – a merev testek mozgásának leírásakor a Newton-egyenletek csak a súlypontra igazak. (Ha a forgatónyomatékokat a  $B$  pontra vonatkoztatnánk, és (3) helyett a

$$K_2 l - G(l/2) \cos \alpha = 0$$

egyenlettel számolnánk, arra a hibás következtetésre jutnánk, hogy  $K_2$  független a sebességtől és csak  $\alpha = 90^\circ$ -nál válik nullává.)

A három egyenletben négy ismeretlen van. A probléma valójában  $F_1$ -re és  $F_2$ -re határozatlan – lehetséges ugyanis, hogy a kerekek „feszülnek” a sínben –, a gyakorlatban azonban a vonat sebességétől függően vagy  $F_1$ , vagy  $F_2$  nulla és így szükség esetén ezek is számolhatók.

A borulás feltételéhez nekünk most elegendő  $K_1$  és  $K_2$ , a sínre merőleges nyomóerők meghatározása. Az (1), (2), (3) egyenletekből:

$$(4) \quad K_1 = \frac{h}{l} \left[ \left( \frac{l}{2h} \sin \alpha + \cos \alpha \right) \frac{mv^2}{R} - \left( \sin \alpha - \frac{l}{2h} \cos \alpha \right) mg \right],$$

$$(5) \quad K_2 = \frac{h}{l} \left[ \left( \frac{l}{2h} \cos \alpha + \sin \alpha \right) mg - \frac{mv^2}{R} \left( \cos \alpha - \frac{l}{2h} \sin \alpha \right) \right].$$

Vizsgáljuk először a nagy sebességek esetén lejtőnek felfelé történő borulást. A sebesség növelésével (5) alapján  $K_2$  csökken. A borulás akkor következik be, amikor  $K_2$  nullává válik. (A sín csak nyomóerőt tud átadni.) Mindaddig nem borul a kocsí, amíg  $K_2$  pozitív, azaz

$$(6) \quad v \leq \sqrt{Rg \frac{(l/2h) \cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - (l/2h) \sin \alpha}}.$$

Az egyenlőséggel meghatározott kritikus sebességnél a felső sín nyomóereje (4) segítségével

$$(7) \quad K_1 = \frac{mg}{\cos \alpha - (l/2h) \sin \alpha},$$

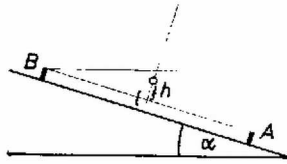
míg az alsó sínnél

$$(8) \quad K_2 = 0.$$

Ha az (5) kifejezésben

$$(9) \quad \cos \alpha - (l/2h) \sin \alpha < 0,$$

azaz  $\frac{h}{l/2} < \operatorname{tg} \alpha$  (2. ábra), akkor  $K_2$  minden sebességértékre pozitív, a vonat sebessége korlátlanul növelhető.



2. ábra

A sínekben ható erők ekkor sebességfüggők, (4) és (5) alapján számolhatók.

Túlságosan megdöntött pályán a haladási sebesség alsó határát is szükséges megadni. Ha a vonat nagyon lassan halad,  $K_1$  nullává válhat, s a kocsi a lejtőnek lefelé dől. Mindaddig nem történik borulás, míg  $K_1$  pozitív, azaz (4) alapján

$$(10) \quad v \geq \sqrt{Rg \frac{\sin \alpha - (l/2h) \cos \alpha}{(l/2h) \sin \alpha + \cos \alpha}}.$$

Természetesen a gyakorlatban a pályát csak annyira döntik meg, hogy a megállásra kényszerülő vonat ne boruljon fel, azaz hogy

$$(11) \quad \sin \alpha - \frac{l}{2h} \cos \alpha < 0$$

legyen.

Összefoglalva tehát, ha a kocsi adatai  $l$  és  $h$  – lehetővé teszik, hogy a (9) és (11) feltételek egyszerre teljesüljenek, ami a

$$(12) \quad \frac{2h}{l} < \operatorname{tg} \alpha < \frac{l}{2h}$$

egyenlőtlenséget jelenti, akkor a döntési szög megfelelő választásával a vonat bármilyen kanyarban tetszőleges sebességgel haladhat.

Ha a (9), (11) feltételeknek egyike sem teljesül az a dőlési szögre, akkor a haladási sebességet úgy kell megválasztani, hogy  $v$  a

$$(13) \quad \sqrt{Rg \frac{\sin \alpha - (l/2h) \cos \alpha}{(l/2h) \sin \alpha + \cos \alpha}} < v < \sqrt{Rg \frac{(l/2h) \cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - (l/2h) \sin \alpha}}$$

tartományba essék.

*Földvári Csaba* (Budapest, Apáczai Csere J. Gimn., III. o. t.) és  
*Horváth Ernő* (Székesfehérvár, József A. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján

*Megjegyzések.* 1. Ebben a feladatban a vizsgált test a  $G$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  erők hatására mozog körpályán. A testet körpályán tartó erők eredőjét szokás centripetális erőnek nevezni, bár ez a megkülönböztetés félrevezető lehet, mert ezt az erőt általában nem egy test fejtí ki. A szokásos elnevezéseknél az erőket származásuk – súlyerő, kényszererő, súrlódási erő stb. –, és nem a hatásuk szerint különítjük el.

2. A feladat megoldható a kocsival együtt mozgó koordináta-rendszerben is. Mivel a vonat körpályán mozog, ez nem inerciarendszer. Az együttmozgó koordináta-rendszer használata célszerű lehet, mert a feladat statikai problémává egyszerűsödik, de alaposan meg kell gondolni, hogy a nem inerciarendszerben milyen tehetetlenségi erőkkel kell számolnunk. A tehetetlenségi erők ún. fiktív erők – nem érvényes rájuk pl. Newton III. törvénye (nincs ellenerejük) –, bevezetésük jogosságát komoly matematikai számításokkal kell igazolni (lásd: Budó: Mechanika).

Jelen esetben csak egy tehetetlenségi erő nem nulla, a centrifugális erő (ami semmiképpen sem a centripetális erő ellenereje). Az egyenletes körmozgás speciális esetében  $F_{cf} = mv^2/R$ , és a körpálya sugarának irányában kifelé mutat.