

Alkalmazzuk az  $m$  tömegű test mozgására Newton II. törvényét! A mozgást meghatározó egyenlet felírásánál két esetet kell megkülönböztetnünk attól függően, hogy a test csúszik (1) vagy pedig tapad (2) a szalagon:

$$(1) \quad a' = -\omega^2 x' + \mu g,$$

$$(2) \quad v' = v.$$

Itt  $a'$  a test gyorsulása,  $v'$  a sebessége,  $x'$  pedig a rugó egyensúlyi helyzetétől mért kitérése;  $\omega^2 = D/m$ . Az első esetben az egyenlet megoldása harmonikus rezgőmozgás:

$$(3) \quad x' = A \cdot \sin(\omega t + \delta) + x_0,$$

$$v' = A\omega \cdot \cos(\omega t + \delta),$$

$$a' = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \delta).$$

Az (1) egyenletbe való helyettesítéssel kapjuk, hogy  $x_0 = \mu g / \omega^2$ ;  $A$  és  $\delta$  később meghatározandó állandók. Ez a megoldás akkor lesz érvényes, ha a kapott  $v'$  érték kisebb a szalag haladási sebességénél:

$$(4) \quad v' < v.$$

Abban az esetben, amikor a test sebessége túllépné ezt az értéket (a test lehangná a szállítószalagot), a szalag és a test együtt mozog és a test megtapad a szalagon (a gyakorlatban  $\mu_0 > \mu$ ). A (2) egyenlet egyenletes mozgást ír le:

$$(5) \quad x' = v \cdot t + x^*,$$

$$v' = v,$$

$$a' = 0,$$

ahol  $x^*$  ismeretlen állandó. Ez a megoldás érvényes, amikor a testre ható rugóerő ( $|F| = D \cdot x'$ ) kisebb, mint a tapadási súrlódás maximális értéke ( $S_0 = \mu_0 m g$ ). Az  $F < S_0$  feltételből jelöléseinkkel az

$$(6) \quad x' < \frac{\mu_0 g}{\omega^2}$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

Látható, hogy a megoldást – a súrlódásos feladatokra általában jellemző módon – a mozgást leíró egyenletek és az ezen egyenletek érvényességét megszabó egyenlőtlenségek adják.

Az ismeretlen állandókat ( $A, \delta, x^*$ ) és az egyes mozgásfajták időtartamát a határesetekre vonatkozó folytonossági feltételekből kell meghatározni.

Legyen  $t = 0$  az az időpont, amikor a test éppen kezdi a rezgőmozgást! Ekkor a (6) feltétel egyenlőség formáját ölti és az (5) egyenletrendszer első egyenletével együtt meghatározza  $x^*$ -ot:

$$x^* = \frac{\mu_0 g}{\omega^2}.$$

Nilvánvaló, hogy egy test út – idő grafikonja folytonos vonal, tehát a (3) és (5) egyenletrendszer első egyenletei az átmenet pillanatában  $x'$ -re ugyanazt értéket kell, hogy adják:

$$A \cdot \sin \delta + x_0 = x^*.$$

Hasonló módon folytonos függvény a sebesség is, mert nulla idő alatt véges sebességváltozás végtelen nagy erőt feltételez (ezt csak a különböző ütközési feladatoknál szokták elméletben megengedni). A (3) és (5) egyenletrendszer második egyenleteinek jobb oldalai egyenlők:

$$A\omega \cdot \cos \delta = v.$$

Az utóbbi két összefüggésből kapjuk a hiányzó paramétereket:

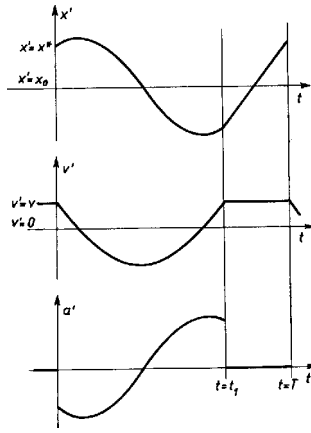
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\mu_0 - \mu}{v \cdot \omega} \cdot g, \quad A = \frac{1}{\omega} \sqrt{v^2 + \left[ (\mu_0 - \mu) \cdot \frac{g}{\omega} \right]^2}.$$

A harmonikus rezgőmozgás a  $t = t_1$  időpontban fejeződik be, amikor a (4) feltétel egyenlőségbe megy át:

$$v = -A\omega \cdot \cos(\omega t_1 + \delta).$$

Ez az egyenlet az előbb meghatározott mennyiségek ismeretében megadja  $t_1$  értékét.

A mozgást jellemző időfüggvényeket az 1. ábrán tüntettük fel.



1. ábra

Látható, hogy a  $t_1$  időpontban  $x' = x_0 - (x^* - x_0)$ . A  $t = T$  időpontig az egyenletes  $v$  sebességgel haladó test helykoordinátája erről az értékről  $x^*$ -ra növekszik. Az

$$x^* - [x_0 - (x^* - x_0)] = 2 \cdot (x^* - x_0)$$

út megtételéhez

$$T - t_1 = 2 \frac{x^* - x_0}{v}$$

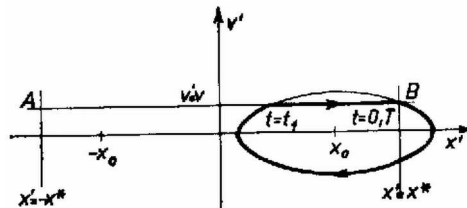
idő szükséges. Ebből az egyenletből a  $T$  periódusidőt számíthatjuk ki.

Végeredményben a test mozgását a következőképpen írhatjuk le. A  $t = 0$  időpontban a szállítószalag és a test közötti tapadási súrlódás már nem képes egyensúlyozni a rugóerőt és a test  $v$  kezdősebességgel rezgőmozgásba kezd, amelynek körfrekvenciáját a rugóállandó és a test tömege, egyensúlyi helyzetét pedig a csúszó súrlódás határozza meg. Ez a rezgőmozgás megszűnik, amikor a sebesség ismét  $v$  lesz; a tapadó súrlódási erő kiegyensúlyozza a rugóerőt és a test mindaddig egyenletes mozgást végez, amíg helykoordinátája ismét  $x^*$  nem lesz. Ezután a mozgás periodikusan ismétlődik.

*Tantalics Béla* (Lenti, Gimnázium, III. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. Megvizsgálhatjuk azt is, hogy a fentebb leírt periodikus mozgás hogyan indul meg. A diszkussziót szemléletesen tehetjük az elméleti fizikában egyébként gyakran használt sebesség – út grafikon segítségével.

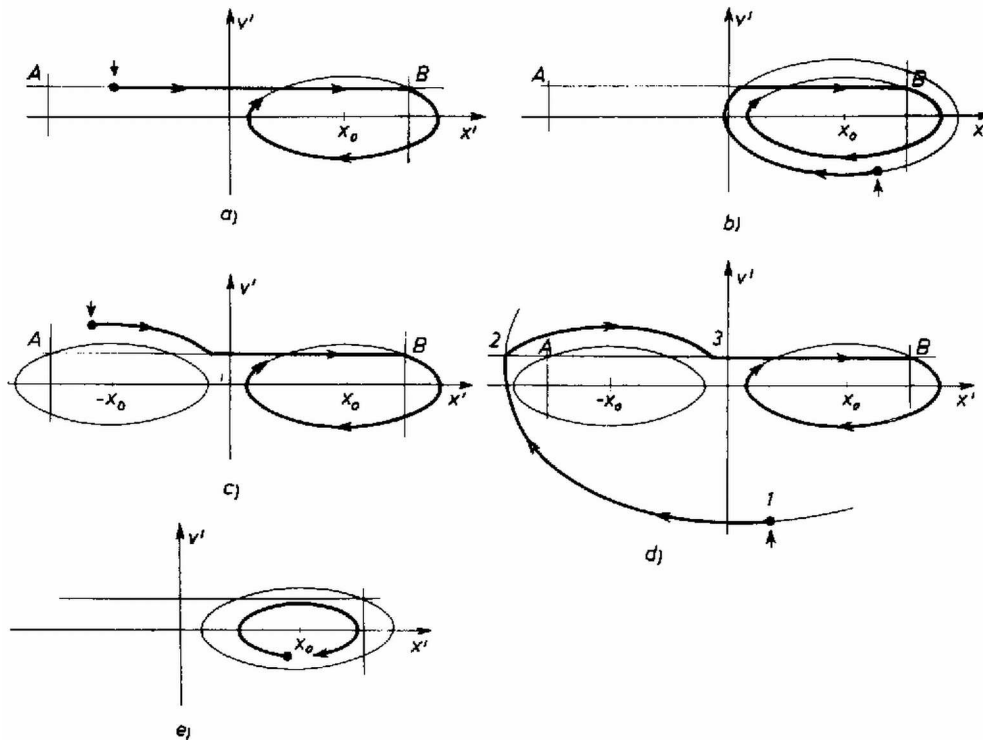
Ha egy koordináta-rendszer vízszintes tengelyére a test helykoordinátáját; függőleges tengelyére a test sebességét mérjük fel, az így kifeszített sík minden pontja a test egy mozgásállapotának felel meg. A helyzetben és sebességben egymás után bekövetkező változásoknak megfelelően az állapotot jellemző pont a síkon mozog és egy görbét ír le. (A görbe mentén feltüntethetjük az adott mozgásállapot bekövetkezésének időpontját.) Egyenesvonalú egyenletes mozgásnál ez a görbe egy vízszintes egyenes ( $v' = \text{áll.}$ ,  $x'$  változik); periodikus mozgásnál önmagába visszatérő zárt görbe; tiszta harmonikus rezgőmozgásnál egy ellipszis, amelynek nagytengelye az amplitúdó, kistengelye *amplitúdó*  $\cdot \omega$ . A megoldásban tárgyalt periodikus mozgásnak megfelelő görbe egy adott nagyságú ellipszis, melynek egy szelete le van hasítva (2. ábra).



2. ábra

A kezdeti  $v'$  és  $x'$  érték az állapotsík egy pontját jelöli ki. A kérdést úgy fogalmazhatjuk meg, hogy ebből a pontból milyen módon jut a test állapota a 2. ábrán látható görbére?

Legegyszerűbb eset, ha kezdetben a testet valamilyen  $x'$  helyen (pl.  $x' = 0$ -nál vagy  $x' = x_0$ -nál)  $v' = v$  sebességgel a szalagra rakjuk. Ha a kezdeti helyzet teljesíti a  $-x^* < x' < x^*$  feltételt (a kezdeti helyzetnek megfelelő pont az  $AB$  szakaszon van), akkor a tapadási súrlódás a testet az  $x' = x^*$  helyre szállítja és a mozgás a továbbiakban periodikus. (3a. ábra; nyíllal jelölve a kezdeti állapot.)



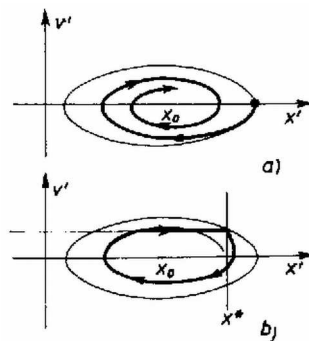
3. ábra

Ha a test állapotát jelző pont kezdetben nincs rajta a fent meghatározott egyenesen, akkor induláskor a test csúszik és harmonikus rezgőmozgást végez, melynek amplitúdója tetszőleges lehet. Az állapotgörbe szintén ellipszis, melynek középpontja  $x_0$ , ha  $v > v'$  és  $-x_0$ , ha  $v < v'$  (az ellipszis középpontjának helyzetét a csúszó súrlódási erő iránya határozza meg). Legyen először kezdetben  $v' < v$ . Ekkor, miután az induló ellipszis eléri az  $AB$  egyenest, a mozgás az egyenesen folytatódik és végül rátalál a periodikus mozgásra (3b. ábra). Ha kezdetben  $v' > v$ , akkor is lehetséges a fenti folyamat (3c. ábra).

Mi a helyzet akkor, ha az induló ellipszis nem metszi az  $AB$  egyenest? (Fizikailag ez azt jelenti, hogy a testet kezdetben erősen meglöktük.) Az amplitúdó olyan nagy, hogy a  $v' = v$  feltétel teljesülésekor a tapadási súrlódás maximális értéke sem elég a rugóerő kompenzálására és a test továbbhalad. Ebben a pillanatban azonban a csúszó súrlódási erő előjelet vált és tovább fékezi a test mozgását. Ez a folyamat többször is megismétlődhet, míg az amplitúdó annyira lecsökken, hogy a tapadó súrlódás képes lesz a test sebességét a szalag sebességével egyenlővé tenni. A 3d. ábrán láthatjuk a folyamatot egy egyszerűbb esetben. Az 1 – 2 görbe egy  $x_0$  középpontú ellipszis darabja. A 2 – 3 szakasz egy  $-x_0$  középpontú ellipszisdarabja.

Végül lehetséges, hogy a test kezdetben az  $x_0$  pontban áll vagy nagyon kis amplitúdójú rezgéseket végez. Ekkor sebessége mindig kisebb lesz a szalag sebességénél, és a tapadás sohasem következik be; a test egyszerű rezgőmozgást végez és a súrlódás csak a mozgás középpontját határozza meg. Ilyen pl. a 3e. ábrán látható eset.

2. A probléma gyakorlati szempontból akkor érdekes, ha a rezgést valamilyen hatás csillapítja (pl. a vonóval rezgésbe hozott húr, amikor az energia egy része hang formájában kisugárzódik). Ilyen esetben pl. a rezgőmozgás állapotgörbéje csökkenő amplitúdójú (4a. ábrán látható görbe); a csúszó és tapadó súrlódás közötti különbség teszi lehetővé a mozgás fenntartását (4b. ábra).



4. ábra

A vonó gyantázásával ez a különbség – és ezzel a rezgés amplitúdója – növelhető. Hasonló a helyzet, amikor az üveg pohár szélét nedves ujjunkkal dörzsölve hangot hallunk; a tapadó és csúszó súrlódás közötti különbséget itt az a vékony folyadékfilm okozza, ami a két felület között kialakulhat.

**Mihály László**