



A q töltésű részecske potenciális energiája:

$$E_p = k \cdot \frac{qQ}{r},$$

ahol k a mértékrendszer választásától függő állandó, r pedig a két részecske távolsága. Az energiamegmaradás törvénye szerint

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + k \frac{qQ}{r},$$

ha v a részecske pillanatnyi sebessége. Felhasználtuk, hogy kezdetben a potenciális energia nulla.

Centrális erőterben érvényes az impulzusmomentum megmaradásának törvénye is:

$$v_0 \cdot a = r \cdot v_{\perp},$$

ahol v_{\perp} a részecske sebességének a két részecskét összekötő egyenesre merőleges komponense.

A részecskék távolsága akkor a legkisebb, ha a részecskéket összekötő szakasz merőleges a sebességre, ellenkező esetben ugyanis a q töltésű részecskének van sugárirányú sebessége, s így r a szóban forgó időpillanat előtt vagy után kisebb is lehet. A $v_{\perp} = v$ helyettesítéssel egyenleteinkből kapjuk, hogy

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m \left(v_0 \cdot \frac{a}{r} \right)^2}{2} + k \frac{qQ}{r}.$$

Ezt az egyenletet átrendezve, r -re másodfokú egyenletet kapunk, amelynek pozitív gyöke:

$$r_{min} = \frac{kQq}{mv_0^2} + \sqrt{\left(\frac{kQq}{mv_0^2} \right)^2 + a^2},$$

és a minimális kinetikus energia:

$$E_{kmin} = \frac{mv_0^2}{2} - k \frac{qQ}{r_{min}} = mv_0^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mv_0^2 a}{kQq} \right)^2}} \right].$$

Abban a speciális esetben, amikor $a = 0$,

$$r_{min} = \frac{kQq}{mv_0^2/2}, \quad E_{kmin} = 0.$$

Eredményünk megfelel annak a várakozásnak, hogy ekkor a q töltésű részecske sebessége a pálya legközelebbi pontján nulla lesz.

Horváth Ernő (Székesfehérvár, József A. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Az impulzusmomentum megmaradásának törvénye a Kepler-törvények között megismert területi sebesség tétel általános megfogalmazása. Bebizonyítható, hogy olyan erőterben, ahol a testre ható erő mindig a testet egy adott ponttal összekötő egyenes irányába mutat („centrális erőter”), az összekötő egyenes időegységénként egyenlő nagyságú területet sűrol. Ez a területi sebesség felírható az összekötő egyenesre merőleges sebesség és az erőter centrumától mért távolság szorzataként, vagy – ami ezzel egyenlő – a teljes sebesség és az összekötő egyenes sebességre merőleges vetületének szorzataként. A területi sebesség és a tömeg szorzata az impulzusmomentum.