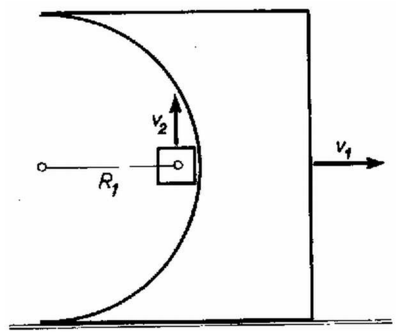
Az adott pillanatban legyen a M tömegű test sebessége v_1 ugyanennyi a m tömegű test súlypontjának vízszintes irányú sebességkomponense, és legyen a m tömegű test súlypontjának függőleges irányú sebességösszetevője v_2.



Vizsgáljuk először a kocka esetét. A kocka súlypontjának sebességét a v_1 és v_2 sebességkomponensek adják meg, de a kocka a haladó mozgáson kívül az adott pillanatban ω szögsebességű forgó mozgást is végez. Ha koordinátarendszerünket a M tömegű testhez rögzítjük, a kocka mozgása olyan körmozgás, ahol a súlypont pályasugara

$$R_1 = \sqrt{R^2 - a^2/4} - a/2.$$

Ebben a koordináta-rendszerben

$$v_2 = R_1 \cdot \omega. \tag{1}$$

A nyugvó koordináta-rendszerhez képest haladó mozgást végző koordinátarendszerben meghatározott ω szögsebesség lesz érvényes a nyugvó koordinátarendszerben a súlypont körüli forgó mozgásra is.

Írjuk föl az energiatételt:

$$(1/2)mv_0^2 = (1/2)m(v_1^2 + v_2^2) + (1/2)\Theta_k\omega^2 + mg(R - a/2) + (1/2)Mv_1^2. \tag{2}$$

A mozgás folyamán megmarad még a mozgásmennyiség vízszintes összetevője is, mivel csak függőleges külső erők hatnak (súlyerő és a talaj nyomóereje):

$$mv_0 = (M + m)v_1. \tag{3}$$

Ebből a három egyenletből kifejezhetjük v_1 és v_2 értékét, és ezzel egyértelműen megadjuk a két test sebességét a megadott pillanatban:

$$v_1 = \frac{m}{M+m}v_0; \quad v_2 = \left(\frac{\dfrac{M}{M+m}v_0^2 - 2g(R - a/2)}{1 + \dfrac{a^2}{6(R^2 - a\sqrt{R^2 - a^2/4})}}\right)^{1/2}.$$

Golyó esetén, ha a golyó és a M tömegű test között nincs súrlódás, akkor a mozgás folyamán a golyó szögsebessége nem változik meg. Az energiatétel:

$$(1/2)mv_0^2 = (1/2)m(v_1^2 + v_2^2) + mg(R - r) + (1/2)Mv_1^2. \tag{2a}$$

A (3) impulzustétel változatlanul érvényben marad, a keresett sebességeket a (2a) és a (3) egyenletekből lehet kifejezni:

$$v_1 = \frac{m}{M+m}v_0; \quad v_2 = \left(\frac{M}{M+m}v_0^2 - 2g(R - r)\right)^{1/2}.$$

Tiszta gördülésnél a golyó szögsebességét a

$$v_2 = (R - r)\omega \tag{1b}$$

egyenlet határozza meg. Feltételezve, hogy a golyó már $\omega_0 = v_0/r$ szögsebességgel közelítette meg az M tömegű testet, az energiatétel:

$$(1/2)mv_0^2 + (1/2)\Theta_g\omega_0^2 = (1/2)m(v_1^2 + v_2^2) + (1/2)\Theta_g\omega^2 + mg(R - r) + (1/2)Mv_1^2, \tag{2b}$$

és mivel a M tömegű test és a talaj között ebben az esetben sincs súrlódás, a (3) egyenlet érvényben marad. Egyenletrendszerünket most az (1b), (2b), (3) egyenletek alkotják, a keresett sebességek:

$$v_1 = \frac{m}{M+m} v_0; \quad v_2 = \left(\frac{\left(\frac{7}{5} - \frac{m}{M+m} \right) v_0^2 - 2g(R-r)}{1 + \frac{2}{5} \left(\frac{r}{R-r} \right)^2} \right)^{1/2} .$$

Hettinger Ernő (Sopron, Széchenyi I. Gimn., II. o. t.)