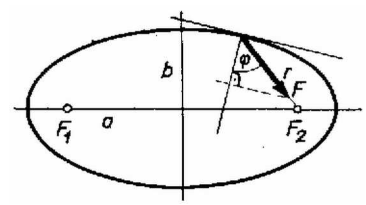
Az ellipszispályát a kérdéses pontokban helyettesíthetjük a megfelelő görbületi körökkel. Ekkor az ellipszispályán való tartáshoz

$$F'_m = m \cdot v^2/\varrho \tag{1}$$

nagyságú erő szükséges, ahol ϱ a görbületi sugár. A görbületi sugár meghatározása általában differenciálgeometriai úton történhet, ez azonban magasabb matematikai ismereteket igényel.

A probléma megoldható elemi módszerekkel is. A falra ható erő egy bizonyos pontban (1) alapján csak a pillanatnyi sebességtől függ, a golyó mozgása tehát helyettesíthető egy olyan ellipszispályán történő változó sebességű mozgással, amelynek az adott pontban a golyó sebességével azonos a sebessége. Ilyen mozgás lehet például a bolygómozgás.

Helyezzünk az ellipszis egyik gyújtópontjába egy olyan testet, amely a golyóra $F = k/r^2$ nagyságú vonzóerővel hat.



1. ábra

Az 1. ábra alapján a pálya egy P pontjában a kényszerpályát helyettesítő „műnap”

$$F_m = F \cdot \cos\varphi \tag{2}$$

nagyságú pályára merőleges erőt fejt ki. A bolygómozgás és a kényszermozgás egyenértékűségét a P pontban k alkalmas megválasztásával érhetjük el.

Kepler II. törvénye szerint a területi sebesség állandó:

$$(1/2)r \cdot v \cos\varphi = \text{áll.}$$

T keringési idő alatt a vezérsugár az egész $ab\pi$ területet súrolja, tehát

$$(1/2)r \cdot v \cdot (\cos\varphi) \cdot T = ab\pi : \tag{3}$$

A keringési időt Kepler III. törvényének felhasználásával határozhatjuk meg. Vegyünk egy a sugarú körpályát, melynek középpontjában ugyanaz a „műnap” van. Ekkor a körpályán keringő bolygónak szintén T a keringési ideje. Newton II. törvénye szerint $F = mv^2/a$, azaz

$$\frac{k}{a^2} = \frac{m}{a}\left(\frac{2a\pi}{T}\right)^2. \tag{4}$$

Ebből

$$T = 2a\pi\sqrt{\frac{ma}{k}}, \tag{5}$$

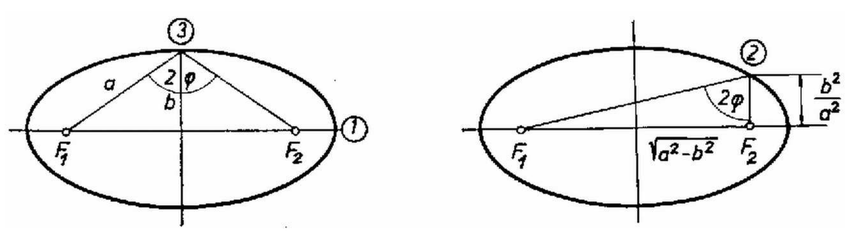
amit a (3) egyenletbe helyettesítve, k-ra a következőt kapjuk:

$$k = m \cdot (a/b^2)(r \cdot v \cdot \cos\varphi)^2. \tag{6}$$

Itt v az eredeti mozgás sebessége (ez állandó, mert nincs súrlódás), ami a φ szöggel jellemzett helyen éppen megegyezik a k állandóval megadott bolygómozgás pillanatnyi sebességével. A kapott összefüggés alapján a (2) egyenletből F_m meghatározható:

$$F_m = mv^2(a/b^2)\cos^3\varphi. \tag{7}$$

A kérdéses három pontban ható kényszererők nagyságát $\cos\varphi$ ismeretében számíthatjuk ki (2. ábra).



2. ábra

1. Látható, hogy $\varphi=0$; $\cos\varphi=1$, tehát

$$F_1=mv^2\cdot a/b^2=78{,}1\ \mathrm{N}.$$

2. Felhasználjuk, hogy az ellipszis vezérsugarai az érintővel azonos szöget zárnak be, tehát a vezérsugarak közötti szögfelező merőleges az érintőre.

A 2. ábra alapján

$$\cos 2\varphi=\frac{\overline{F2}}{\overline{F'2}}=\frac{b^2/a}{(2a^2-b^2)/a}=\frac{b^2}{2a^2-b^2},$$
$$\cos\varphi=\sqrt{\frac{a^2}{2a^2-b^2}}.$$

Ezt a (7) egyenletbe helyettesítve:

$$F_2=mv^2\frac{a^4}{b^2(2a^2-b^2)^{3/2}}=49{,}3\ \mathrm{N}.$$

3. $\cos\varphi$ értékét azonnal felírhatjuk: $\cos\varphi=b/a$, így

$$F_3=mv^2\cdot b/a^2=40{,}1\ \mathrm{N}.$$

Ábrahám Tibor (Eger, Gárdonyi G. Gimn.. IV. o. t.)

Megjegyzés. A feladat megoldható úgy is, hogy az ellipszis–mozgást egy, az ellipszis középpontjába helyezett rugó segítségével hozzuk létra. Ezzel a módszerrel nem érkezett helyes megoldás, mert a megoldók nem gondoltak arra, hogy a rugóerőnek csak a pályára merőleges komponense számít.