I. megoldás. A változó nagyságú erő hatására változó gyorsulású mozgás jön létre. Legyen a test tömege m, a mozgás kezdősebessége v_0, végsebessége v_1, a megtett út s, a mozgás ideje t. Az F_m átlagerő egy állandó erő, amely t idő alatt $mv_1 - mv_0$ mozgásmennyiség-változást hoz létre: $F_m \cdot t = mv_1 - mv_0$, azaz

$$F_m = \frac{m(v_1 - v_0)}{t}. \tag{1}$$

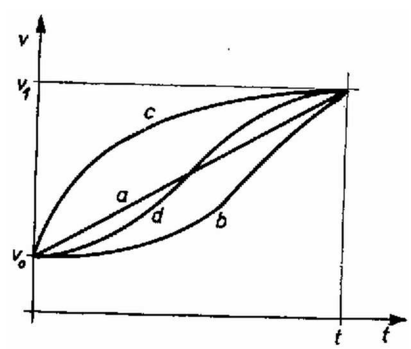
Az erő munkavégzése teljes egészében a mozgási energiát változtatja meg, így az F_e átlagerő egy állandó erő, amelynek s úton végzett munkája: $(1/2)mv_1^2 - (1/2)mv_0^2$ energiaváltozást hoz létre. $F_e \cdot s = (1/2)mv_1^2 - (1/2)mv_0^2$, azaz

$$F_e = \frac{m(v_1^2 - v_0^2)}{2s}. \tag{2}$$

Tegyük fel, hogy valamely mozgásnál F_m és F_e értéke megegyezik. Ekkor (1) és (2) alapján

$$\frac{s}{t} = \frac{v_0 + v_1}{2}. \tag{3}$$

A bal oldal az átlagsebesség (a mozgás egész útja osztva az összes idővel), a jobb oldal pedig a kezdeti és végsebesség számtani középarányosa. Olyan mozgásokra tehát, ahol a (3) egyenlet teljesül, azaz az átlagsebesség a kezdeti és végsebesség számtani középarányosával egyenlő, a kétféle módon definiált átlagerő megegyezik, más esetben különbözik. Pl. egyenletesen gyorsuló mozgásra a (3) összefüggés teljesül, ebben az esetben F_e és F_m megegyeznek egymással (és a mozgást létrehozó állandó erővel).



Az ábrán négy különböző sebesség–idő függvényt ábrázoltunk. Az a egyenes állandó gyorsulású mozgásnak felel meg. A megtett út éppen a görbe alatti terület, amely az a esetben éppen a (3) egyenletnek megfelelő $\frac{v_0 + v_1}{2} \cdot t$. A b, ill. c görbével jellemzett esetben a terület – azaz a megtett út – ennél kisebb, illetve nagyobb.

Így általában a kétféle átlagerő nem egyenlő, de állandó gyorsulású mozgás speciális esetében megegyezik. (Igaz az $F_m = F_e$ egyenlőség az ábra szerinti d görbéhez hasonló esetekben is, amikor a görbe alatti terület megegyezik az a egyenes alatti területtel.)

Balogh Mária (Aszód, Petőfi S. Gimn., II. o. t.)
és *Zimányi Gergely* (Bp., Fazekas M. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Az időben változó nagyságú erő által végrehajtott mozgásmennyiség- és energiaváltozást az

$$\int_0^t F(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{és} \quad \int_0^s F(s)\mathrm{d}s$$

integrálokkal lehet kiszámítani.

Adjuk meg az erőt például az idő függvényében! Ekkor az $\int_0^s F(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t F(t)v(t)\mathrm{d}t$ átalakítást célszerű végrehajtani. A két átlagerő (1)-hez és (2)-höz hasonlóan:

$$F_m = \frac{1}{t}\int_0^t F(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{és}$$

$$F_e = \frac{1}{s}\int_0^t F(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ha a $v(t)$ függvény állandó, kiemelhető az integráljel elé, ekkor $F_e = F_m$. Egyébként általában a két kifejezés értéke különböző lesz, kivéve az ábra d görbéjéhez hasonló eseteket.

Megjegyzés. Sok megoldó példák felsorakoztatásával próbálta eldönteni a feladatban feltett kérdést. Megmutatták, hogy egyenletesen gyorsuló mozgás esetén a kétféle módon definiált átlagerő egyenlő, és speciális példát kerestek annak igazolására, hogy az egyenlőség nem általános. Két példa, amelyre a számolás egyszerű: az erő az idővel arányosan növekszik; az erő a mozgás első szakaszában állandó F_1, a másodikban szintén állandó $F_2 \neq F_1$.

A bizonyításnak ez a formája is teljes értékű; dolgozatukra – ha az egyébként hibát nem tartalmazott – ezek a megoldók is 4 pontot kaptak.