A rakétába préselt levegő kitágulása hirtelen megy végbe, a gáz nem tud hőt cserélni környezetével, így állapotváltozása adiabatikus. Az adiabatikus állapotváltozás során

$$pV^\kappa = \text{állandó}, \tag{1}$$

ahol $\kappa = c_p/c_v > 1$. A gáz belső energiájának rovására egyrészt munkát végez a külső légnyomással szemben, másrészt felgyorsítja a rakétát és a kilökött vizet. A folyamat gyorsasága miatt a nehézségi erő szerepe kicsi, a rendszert zártnak tekinthetjük, s az impulzus, illetve energiamegmaradás tételét alkalmazzuk.

Ha a levegő nyomása épp akkor éri el a p_0 külső nyomást, amikor a teljes vízmennyiség elhagyja a rakétát, akkor

$$p(V_0 - m_2/\varrho)^\kappa = p_0 V_0^\kappa.$$

(Itt ϱ a víz sűrűségét, p a gáz kezdeti nyomását jelöli, ami a túlnyomás és a külsőnyomás összege.) Ebből a víz tömege

$$m_2 = m_0 \equiv \varrho V_0 \left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/\kappa}\right]. \tag{2}$$

Ha a rakétában levő víz tömege ennél az m_0 értéknél nagyobb, a külső és a belső nyomás kiegyenlítődik az összes víz kilökődése előtt: a levegő kevesebb munkát végez, mint az $m = m_0$ esetben, és a maradék vízzel is súlyosbodott rakéta kisebb sebességgel indul. Ezért elegendő az $m_2 \leqq m_0$ esetet vizsgálni.

A rakéta sebességét v_1, a vízét v_2 jelöli. Az impulzusmegmaradás miatt

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0. \tag{3}$$

Induláskor a rakéta–víz–levegő rendszer összes energiája nem változik, így

$$\Delta E = (1/2)m_1 v_1^2 + (1/2)m_2 v_2^2 + p_0 m_2/\varrho + \Delta U = 0. \tag{4}$$

Itt $p_0 m_2/\varrho$ a külső légnyomással szemben végzett munka, ΔU pedig a rakétába préselt levegő belső energiájának megváltozása. A rakétából kiáramló levegő impulzusát és energiáját (a levegő kis tömege miatt) elhanyagoljuk.

A $pV = m_{\text{lev}} \cdot RT$ állapotegyenlet felhasználásával ΔU így írható:

$$\Delta U = c_v m_{\text{lev}} \Delta T = (c_v/R)\Delta(pV). \tag{5}$$

A gáz kezdeti p és végső $\overline{p}$ nyomása között az (1) összefüggés teremt kapcsolatot:

$$p(V_0 - m_2/\varrho)^\kappa = \overline{p} V_0^\kappa. \tag{6}$$

Ennek alapján ΔU végső alakja

$$\Delta U = \frac{c_v}{R}\left[\overline{p}V_0 - p\left(V_0 - \frac{m_2}{\varrho}\right)\right] = \frac{c_v}{R}p\left(V_0 - \frac{m_2}{\varrho}\right)\cdot\left[\left(\frac{V_0 - m_2/\varrho}{V_0}\right)^{\kappa-1} - 1\right]. \tag{7}$$

A (3), (4), (7) egyenletek segítségével kifejezhetjük a rakéta indulási mozgási energiáját:

$$\frac{m_1}{2}v_1^2 = \frac{m_2}{m_2 + m_1}\left\{\frac{c_v}{R}p\left(V_0 - \frac{m_2}{\varrho}\right)\left[1 - \left(\frac{V_0 - m_2/\varrho}{V_0}\right)^{\kappa-1}\right] - \frac{p_0 m_2}{\varrho}\right\}.$$

A kapott kifejezés maximumát csak numerikusan tudjuk meghatározni. Hogy minél kevesebb állandóval kelljen dolgoznunk, bevezetjük az $x = m_2/\varrho V_0$ dimenziótlan változót. Ezzel

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{x}{x + m_1/\varrho V_0}\left\{\frac{c_v}{R}pV_0(1-x)\left[1 - (1-x)^{\kappa-1}\right] - p_0 V_0 x\right\}. \tag{8}$$

A levegőre vonatkozó állandókat a függvénytáblázatból keressük ki:

$$c_p = 0{,}24\ \text{cal/g°C}, \qquad c_v = 0{,}17\ \text{cal/g°C}.$$

A (8)-ban szereplő állandók értékei:

$$\frac{m_1}{\varrho V_0} = 0{,}44, \quad p_0 V_0 = 180\ \text{atm cm}^3, \quad R = c_p - c_v = 0{,}07\ \text{cal/g°C},$$
$$\frac{c_v}{R}pV_0 = 1352\ \text{atm cm}^3, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}4,$$

E számértékeket felhasználva

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{x}{x + 0{,}44}\left(1352 - 1532x - 1352(1-x)^{1{,}4}\right)\ \text{atm cm}^3.$$

Az x-változónak csak azon értékei érdekesek, amelyekre

$$x \leqq \frac{m_0}{V_0\varrho} = 1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{1,4}} = 0{,}54.$$

x	0	0,1	0,3	0,4	0,43	0,45	0,47	0,5	0,54
$m_1 v_1^2/2$	0	6,0	29,1	37,1	38,4	39,0	39,3	39,2	37,5

Az értéktáblázat alapján a kifejezés maximuma az

$$x = 0{,}47(\pm\, 0{,}03)$$

helyen van. Ebből az optimális víztömeg:

$$m_2 = x\varrho V_0 = 84{,}6 \text{ g } (\pm\, 5{,}4 \text{ g}).$$

A maximális emelkedési magasság

$$h_{\max} = v^2/2g = 5{,}1 \text{ m}.$$

A rakéta kezdősebessége

$$v_{\max} = 10 \text{ m/s}.$$

Természetesen x értékének pontosabb meghatározása $h_{\max}$ és $v_{\max}$ értékeit valamelyest módosítja.

Vass Albert (Debrecen, Református Gimn., III. o. t.)