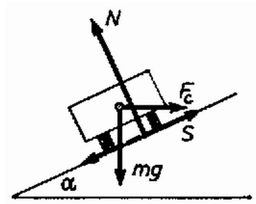
Vizsgáljuk a mozgást az autóval együtt mozgó koordináta-rendszerben! Ekkor (1. ábra) az autóra a súlyerő, a talaj merőleges nyomóereje, az $F_c = m v^2/r$ nagyságú centrifugális erő és a súrlódási erő hat.



1. ábra

A súrlódási erő iránya a többi erő eredőjének irányától függ – ha az autó nagyon gyorsan megy, a súrlódási erő a kanyar középpontja felé, ha túl lassan halad, akkor kifelé mutat. Válasszuk a kifelé mutató súrlódási erőt pozitívnak!

Az egyensúly feltétele:

$$N - mg\cos\alpha - F_c \sin\alpha = 0,$$
$$S - mg\sin\alpha + F_c\cos\alpha = 0,$$

ahonnan

(1) $$N = m\big[g\cos\alpha + (v^2/r)\sin\alpha\big],$$
(2) $$S = m\big[g\sin\alpha - (v^2/r)\cos\alpha\big].$$

Az autó akkor nem csúszik meg, ha $|S| \le \mu_0 N$, vagyis

$$-\mu_0 m\big[g\cos\alpha + (v^2/r)\sin\alpha\big] \le m\big[g\sin\alpha - (v^2/r)\cos\alpha\big] \le$$
$$\le \mu_0 m\big[g\cos\alpha + (v^2/r)\sin\alpha\big].$$

Az egyenlőtlenség oldalait $r/(m\cos\alpha)$ pozitív értékkel szorozva és rendezve kapjuk:

$$v^2(1-\mu_0\,\mathrm{tg}\,\alpha) - \mu_0 rg \le rg\,\mathrm{tg}\,\alpha \le v^2(1+\mu_0\,\mathrm{tg}\,\alpha) + \mu_0 rg.$$

A két egyenlőtlenséget külön rendezve

(3) $$v^2(1+\mu_0\,\mathrm{tg}\,\alpha) \le rg(\mu_0 + \mathrm{tg}\,\alpha),$$
(4) $$rg(\mathrm{tg}\,\alpha - \mu_0) \le v^2(1+\mu_0\,\mathrm{tg}\,\alpha).$$

(3) megoldása

a) $\mu_0\,\mathrm{tg}\,\alpha < 1$ esetén $\quad v^2 \le rg\dfrac{\mu_0 + \mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mu_0\,\mathrm{tg}\,\alpha}$,

b) $\mu_0\,\mathrm{tg}\,\alpha \ge 1$ esetén minden valós v-re fennáll.

(4) megoldása

a) $\mathrm{tg}\,\alpha > \mu_0$ esetén $\quad v^2 \ge rg\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mu_0}{1+\mu_0\,\mathrm{tg}\,\alpha}$,

b) $\mathrm{tg}\,\alpha \leqq \mu_0$ esetén minden valós v-re fennáll.

A két egyenlőtlenség közös megoldása:

A) Ha $\mu_0\,\mathrm{tg}\,\alpha \le 1$ és $\mathrm{tg}\,\alpha > \mu_0$, akkor

$$\sqrt{\frac{rg(\mathrm{tg}\,\alpha - \mu_0)}{1+\mu_0\,\mathrm{tg}\,\alpha}} \le v \le \sqrt{\frac{rg(\mathrm{tg}\,\alpha + \mu_0)}{1-\mu_0\,\mathrm{tg}\,\alpha}}.$$

A lejtőre merőleges nyomóerő (1) felhasználásával

$$\frac{mg}{\cos\alpha + \mu_0\sin\alpha} \le N \le \frac{mg}{\cos\alpha - \mu_0\sin\alpha}.$$

B) Ha $\mu_0\,\mathrm{tg}\,\alpha < 1$ és $\mathrm{tg}\,\alpha \le \mu_0$, akkor

$$0 \le v \le \sqrt{\frac{rg(\mathrm{tg}\,\alpha + \mu_0)}{1-\mu_0\,\mathrm{tg}\,\alpha}},$$

és

$$mg\cos\alpha \le N \le \frac{mg}{\cos\alpha - \mu_0\sin\alpha}.$$

C) Ha $\mu_0 \operatorname{tg} \alpha \geq 1$ és $\operatorname{tg} \alpha > \mu_0$, akkor

$$\sqrt{\frac{rg(\operatorname{tg} \alpha - \mu_0)}{1 + \mu_0 \operatorname{tg} \alpha}} \leq v < \infty,$$

és

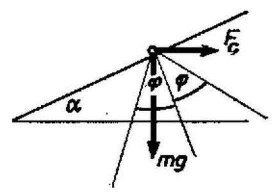
$$\frac{mg}{\cos \alpha + \mu_0 \sin \alpha} \leq N < \infty.$$

D) Ha $\mu_0 \operatorname{tg} \alpha \geq 1$ és $\operatorname{tg} \alpha \leq \mu_0$ (ez az eset csak $\mu_0 \geq 1$ mellett lehetséges, ami általában irreális), akkor az autó sebessége tetszőleges lehet, a merőleges nyomóerő

$$mg \cos \alpha \leq N < \infty.$$

Sparing László (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A $\operatorname{tg} \varphi = \mu_0$ súrlódási szög bevezetésével a csúszásmentesség feltétele úgy is megfogalmazható, hogy az autó akkor nem csúszik meg a kanyarban, ha a súrlódási erő és a merőleges nyomóerő eredője a lejtő normálisával φ-nél kisebb szöget zár be.



1. ábra

A 2. ábra a B) esetnek megfelelő helyzetet szemlélteti, látható, hogy v-re alsó korlát nem adódhat, mivel F_c mindig kifelé mutat, így a súlyerő és F_c eredője legfeljebb függőleges lehet, igen nagy sebességek esetén azonban a súlyerő és F_c eredője kívül eshet a megengedett tartományon.

Pálfalvi György (Győr, Révai M. Gimn., IV. o. t.)