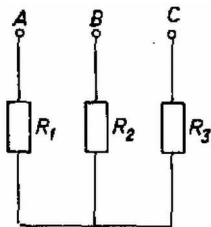
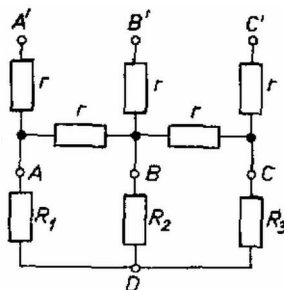


A végtelen ellenállásláncot helyettesítsük az 1. ábra szerint  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  ellenállásokkal.



1. ábra

A lánc ellenállása nem változik, ha egy újabb tagot rákapcsolunk (2. ábra,  $r = 1\Omega$ ).



2. ábra

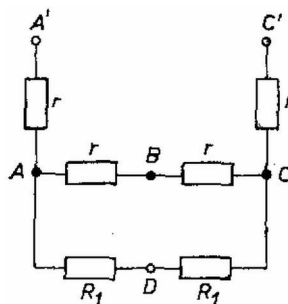
Az eredeti lánc végein mérhető ellenállások (a szimmetrikus elrendezés miatt  $R_{AB} = R_{BC}$ )

$$R_{AB} = R_{BC} = R_1 + R_2 = R_2 + R_3,$$

(azaz  $R_1 = R_3$ ) és

$$R_{AC} = R_1 + R_3 = 2R_1.$$

$A'$  és  $C'$  pontok között mérve az ellenállást látható, hogy az  $R_2$  ellenállás két vége azonos potenciálon van (az  $ABCD$  Wheatstone híd kiegyenlített, a  $B$  és  $D$  pontok azonos potenciálúak); az ellenálláslánc egész középső ágát elhagyhatjuk (3. ábra).



3. ábra

Az  $R_{A'C'}$  ellenállás a fentiek értelmében egyenlő lesz az 1. ábra  $R_{AC} = 2R_1$  ellenállásával:

$$R_{AC} = 2R_1 = 2r + \frac{4R_1r}{2r + 2R_1},$$

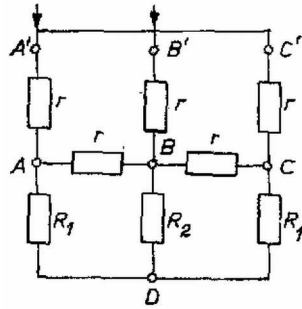
innen

$$R_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot r,$$

azaz

$$R_{AC} = (1 + \sqrt{5})r \approx 3,236\Omega.$$

Az  $R_{AB} = R_{BC}$  ellenállás értékének kiszámításához kössük össze az  $A'$  és  $C'$  pontot (4. ábra).



4. ábra

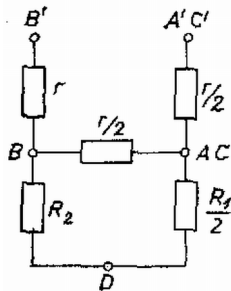
Az ábra szimmetriájából látszik, hogy nemcsak az  $A'$  és  $C'$  pontnak, hanem az  $A$  és  $C$  pontnak is megegyezik a potenciálja, így ezek összeköthetők.

Az 1. ábrán az  $A$  és  $C$  pontokat összekötve a közös  $AC$  és a  $B$  pont közötti ellenállás:

$$R_{AB} = R_{CB} = R_2 + R_1/2.$$

A  $C - C'$  és  $A - A'$ ; a  $B - C$  és  $B - A$ ; a  $D - C$  és  $D - A$  ellenállások párhuzamosan vannak kapcsolva (5. ábra), így az eredő ellenállás  $A'C'$  és  $B'$  pontok között

$$R_{A'B'} = R_{AB} = R_2 + \frac{R_1}{2} = \frac{3}{2}r + \frac{(r/2)(R_2 + R_1/2)}{(r/2) + R_2 + (R_1/2)},$$



5. ábra

Innen

$$R_2 = \left( \frac{2 - \sqrt{5} + \sqrt{21}}{4} \right) r,$$

illetve

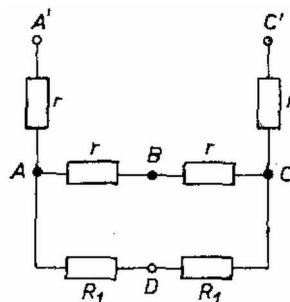
$$R_{AB} = R_1 + R_2 = \frac{4 + \sqrt{5} + \sqrt{21}}{4} \cdot r \approx 2,705\Omega.$$

Katus Gábor (Bp. Apáczai Csere J. Gyak. Gimn. III. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. Az  $R_{BC}$  ellenállás kiszámítható az ellenálláslánc fenti „összehajtása” nélkül is.

A lánc helyettesítő képe egy újabb tag hozzákapcsolásával (ekkor a  $A' - A$  ellenállás elhagyható) a 6. ábra szerint:

$$R_{B'C'} = R_1 + R_2 = 2r + \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + r}}}}$$



6. ábra

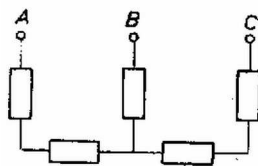
Innen, felhasználva, hogy  $R_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}r$ :

$$R_2 = r \cdot \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{4(\sqrt{5} + 3)} + \frac{1}{2(\sqrt{5} + 3)} \cdot \sqrt{\frac{63\sqrt{5} + 147}{2}} \right), \quad R_{AB} = R_{BC} = R_1 + R_2 = 2,705\Omega.$$

2. Nagyon sok megoldó – hibásan –  $R_{BC}$  számolásakor eltekintett a  $A$  pont alatti teljes szélső ágtól, és így  $R_{AB}$ -re  $(1 + \sqrt{3})r$  értéket kapott, ami ugyan számértékieg csak kissé tér el a helyes eredménytől, de a 6. ábrára tekintve látszik, hogy nyilvánvalóan hibás.

3. A megoldásban abból indultunk ki, hogy a végtelen ellenállásláncot az 1. ábra szerint három ellenállással helyettesíthetjük. Egy tetszőleges, csak ellenállásokból felépített kapcsolás viselkedését (még ha az végtelen sok ellenállásból áll is) az Ohm törvény írja le. Azaz pl. kétpólus esetén (amikor a kapcsolás két pontja van kijelölve) a két pontra kapcsolt feszültség és a létrejövő áram hányadosa állandó, az állandó az az ellenállásérték, amely minden szempontból úgy viselkedik, mint az eredeti kétpólus. Tetszőleges, csak ohmos ellenállásokból álló kétpólus így egyetlen ellenállással helyettesíthető. Hasonlóan járhatunk el ebben a feladatban, ahol hárompólust kell helyettesítenünk. A három kijelölt pont közül ( $A, B, C$ ) bármelyik kettőt mint kétpólus pontjait tekintve egy-egy ellenállással helyettesíthetjük ( $R_{AB}, R_{AC}, R_{BC}$ ), ami három független ellenállásértéket jelent. Az eredeti kapcsolás legegyszerűbb helyettesítése így az 1. ábra szerinti elrendezés, amely minden szempontból ugyanúgy viselkedik, mint a végtelen ellenálláslánc, ha csak az  $A, B$  és  $C$  pontokat vizsgáljuk.

4. Végtelen hosszú ellenálláslánc ellenállásán a következőt értjük. Jelöljük a 7. ábrán látható  $n$  db elemet tartalmazó véges lánc ellenállását pl.  $A$  és  $B$  között  $R_{AB}^n$ -vel.



7. ábra

Ekkor  $R_{AB}$ -n az  $R_{AB}^n$  sorozat határértékét értjük,  $n \rightarrow \infty$  esetén. Nem nehéz megmutatni, hogy esetünkben valóban van az  $R_{AB}^n$  sorozatnak határértéke, tehát valóban beszélhetünk az  $A$  és  $B$  közötti ellenállásról. Hasonlóképpen beszélhetünk  $R_{BC}$ -ről és  $R_{AC}$ -ről. Ezeket a fenti megoldásunkban hallgatólagosan feltételeztük.