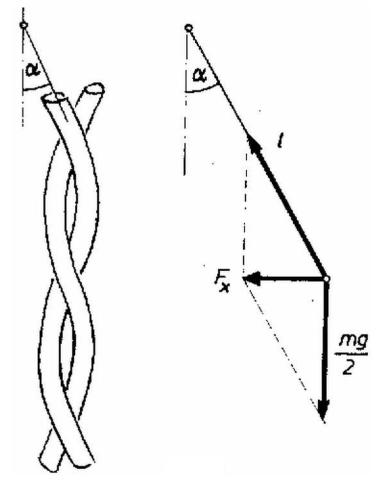
I. megoldás. Vizsgáljuk az $a=0$ esetet! A dísz φ szögű elforgatásakor a két fonál csavarvonal alakot vesz fel (középvonaluk egy r sugarú henger palástjára csavarodik), ahol a fonál a függőlegessel α szöget zár be. Képzeletben lecsavarva (1. ábra) látható, hogy a súlyerő és a fonálerő eredője

$$F_x=\frac{mg}{2}\operatorname{tg}\alpha$$

nagyságú, feltéve, hogy a dísz súlya a két fonálban egyenlően oszlik meg.



1. ábra

Kis α szögek esetén

$$\operatorname{tg}\alpha\approx\sin\alpha=r\varphi/l.$$

A díszre egymástól $2r$ távolságban ható F_x nagyságú, ellentétes irányú erőkből álló erőpár hat, így a díszre ható visszatérítő nyomaték

$$M=-\frac{mgr^2}{l}\varphi,$$

az általa létrehozott szöggyorsulás

$$\beta=-\frac{mgr^2}{l\Theta}\varphi.$$

Mivel a szöggyorsulás arányos a kitéréssel és azzal ellentétes irányú, forgási rezgés jön létre. A

$$\beta=-\omega^2\varphi$$

összefüggés alapján a rezgés ω körfrekvenciája

$$\omega=\sqrt{\frac{mgr^2}{\Theta l}},\quad\text{továbbá}\quad T=2\pi\sqrt{\frac{\Theta l}{mgr^2}}.$$

$a\neq 0$ esetén $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{a+r\varphi}{\sqrt{l^2+(a+r\varphi)^2}}$. Ha φ elég kicsi, akkor $a\gg r\varphi$, tehát $\operatorname{tg}\alpha\approx\dfrac{a}{\sqrt{l^2+a^2}}$.

Ekkor

$$M=\frac{mgar}{\sqrt{l^2+a^2}},\qquad\beta=-\frac{mgar}{\Theta\sqrt{l^2+a^2}}.$$

Tehát a karácsonyfadísz kis kitérés esetén állandó szöggyorsulással mozog a nyugalmi helyzet felé, majd a nyugalmi helyzeten áthaladva szöggyorsulása hirtelen előjelet vált.

Hamza István (Bp., Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

II. megoldás. A feladat energiatétellel is megoldható, ami a folyamat lejátszódásának mechanizmusáról több információt szolgáltat.

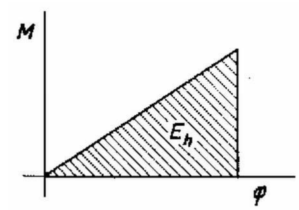
$a=0$ esetén φ szögű elcsavarodáskor a dísz Δh-val feljebb emelkedik, ahol

$$\Delta h=l-\sqrt{l^2-(r\varphi)^2}=l-l\sqrt{1-\left(\frac{r\varphi}{l}\right)^2}\approx l-l\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r\varphi}{l}\right)^2\right]=\frac{r^2}{2l}\varphi^2.$$

A helyzeti energia megváltozása

$$E_h=(1/2)mg(r^2/l)\varphi^2.$$

A helyzeti energia megváltozása φ^2-tel arányos, tehát az a forgatónyomaték, amely ellen munkát végeztünk, φ-vel arányos, vagyis harmonikus forgási rezgés történik (2. ábra).



2. ábra

Az ábrából leolvasható, hogy a visszatérítő nyomaték

$$M = -\frac{mgr^2}{l}\varphi,$$

tehát

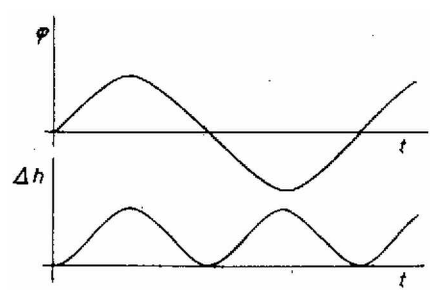
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta l}{mgr^2}}.$$

Rezgéskor a dísz felemelkedésének helyzeti energiája alakul át periodikusan forgási energiává.

$$\varphi = \varphi_0 \sin\omega t,$$

tehát a dísz függőleges mozgását az alábbi összefüggés írja le (3. ábra):

$$\Delta h = \frac{r^2}{2l}\varphi_0^2 \sin^2\omega t.$$

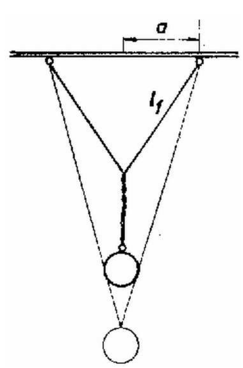


3. ábra

$a \neq 0$ esetén (4. ábra) a dísz a fonál összecsavarodása előtt a felfüggesztés alatt

$$h_0 = \sqrt{l^2 - a^2}$$

távolságra helyezkedik el.



4. ábra

A díszt φ szöggel elforgatva a két fonál $l - l_1$ hosszúságú darabja csavarodik egymásra, ekkor a dísznek a felfüggesztéstől mért távolsága

$$h = \sqrt{l_1^2 - a^2} + \sqrt{(l - l_1)^2 - (r\varphi)^2}.$$

l_1 értékét az határozza meg, hogy az adott φ szögnél a dísz a lehető legmélyebb helyzetét veszi fel, tehát h-nak l_1 függvényében maximuma van:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}l_1} = \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 - a^2}} + \frac{l_1 - l}{\sqrt{(l-l_1)^2 - (r\varphi)^2}} = 0.$$

Az egyenlet l-nél kisebb megoldása

$$l_1 = \frac{la}{a + r\varphi}.$$

Ezt h-ba beírva és felhasználva az $1/(1-x) \approx 1 + x$ és $\sqrt{1+x} = 1 + (x/2)$ közelítéseket

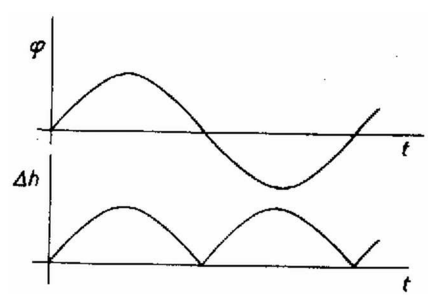
$$\Delta h = \frac{ra}{\sqrt{l^2 - a^2}}|\varphi| \quad \text{és} \quad E_h = \frac{mgra}{\sqrt{l^2 - a^2}}$$

Mivel a helyzeti energia φ abszolút értékével arányos és így M állandó, mindig a nyugalmi helyzet felé mutató,

$$\beta = \frac{mgra}{\Theta\sqrt{l^2 - a^2}}$$

állandó szöggyorsulású mozgás jön létre (5. ábra):

$$\varphi = \frac{\beta}{2}t^2 \quad \text{és} \quad \Delta h = \frac{ra}{\sqrt{l^2 - a^2}}\,\frac{\beta}{2}t^2.$$



5. ábra

A periódusidő az egyenletesen gyorsuló mozgás összefüggéseinek felhasználásával fejezhető ki, 4-szerese annak az időnek, amíg a dísz nyugalmi helyzetéből a maximális φ_0 kitérést eléri:

$$T = 4\sqrt{\frac{2\varphi_0\Theta\sqrt{l^2 - a^2}}{ramg}}.$$

Vladár Károly (Kiskunhalas, Szilády Á. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A mozgás dinamikai leírása során elhanyagoltuk a dísz függőleges mozgását, mivel elég vékony fonál esetén a dísz nagyon gyorsan forog, miközben függőleges sebessége nagyon kicsi marad.

2. Ha $0 < a \ll l$, akkor a mozgás jobb közelítéssel, szinuszos rezgés részeivel is leírható, mivel ekkor $a \neq 0$ esetén is használható a $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha$ helyettesítés.