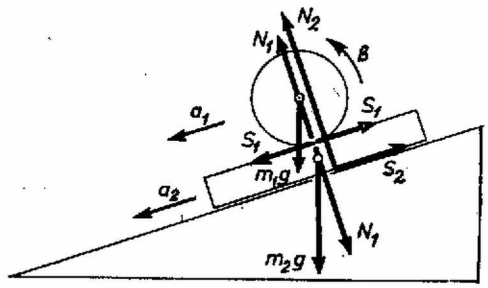

Az ábrán látható jelöléseket használva ($\Theta = (1/2)mr^2$ a henger tehetetlenségi nyomatéka) a mozgásegyenletek a következők:

$$m_1a_1 = m_1g\sin\alpha - S_1, \tag{1}$$

$$0 = m_1g\cos\alpha - N_1, \tag{2}$$

$$\Theta\beta = S_1 \cdot r, \tag{3}$$

$$m_2a_2 = m_2g\sin\alpha - S_2 + S_1, \tag{4}$$

$$0 = m_2g\cos\alpha - N_2 + N_1. \tag{5}$$

Tegyük fel, hogy mindkét érintkezésnél a felületek csúsznak egymáson. A súrlódási erők:

$$S_1 = \mu N_1, \tag{6a}$$

$$S_2 = \mu N_2. \tag{7a}$$

Az egyenletrendszert megoldva, a gyorsulásokra

$$a_1 = a_2 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

adódik. Ez ellentmond feltételezésünknek, hiszen ekkor – nyugalmi helyzetből való indulást feltételezve – a henger és a deszka egymáshoz képest nem csúszhatnának.

A felületek így az egyik, másik vagy mindkét érintkezési helyen összetapadnak. Tegyük fel, hogy csak a deszka csúszik meg a lejtőn, a henger tapad a deszkához. A (6a) egyenlet ekkor érvényét veszti (az $S_1 \leqq \mu N_1$, egyenlőtlenség érvényes), helyette a tapadást kifejező kényszeregyenlet teljesül:

$$r\beta = a_1 - a_2. \tag{6b}$$

Az egyenletrendszerből (amely az (1), (2), (3), (4), (5), (6b), (7a) egyenletekből áll) a_2 értékét kifejezve negatív eredményt kapunk. Így ez a feltevés sem helytálló.

Ha a deszka tapad a lejtőhöz, a (7a) egyenlet helyett az

$$a_2 = 0 \tag{7b}$$

egyenlet érvényes. Feltételezve, hogy a henger viszont csúszva gurul lefelé, az (1), (2), (3), (4), (5), (6a), (7b) egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$a_1 = g(\sin\alpha - \mu\ \cos\alpha) \qquad \text{és} \qquad \beta = \frac{2\mu g\ \cos\alpha}{r}.$$

Feladatunk számadataival a csúszás feltétele, az $a_1 \geqq r \cdot \beta$ egyenlőtlenség nem teljesül, így csak az a lehetőség marad, hogy a deszka nyugalomban marad, a henger pedig csúszásmentesen gördül a deszkán. A (6b) kényszeregyenletet figyelembe véve a megoldás:

$$a_1 = (2/3)g\sin\alpha \approx 1{,}08\ \mathrm{m/s^2}, \quad \beta = (2/3)(g/r)\sin\alpha = 13{,}5\ 1/\mathrm{s}^2$$

Riba Mária (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.),
Kiss Ildikó (Zalaegerszeg, Zrinyi M. Gimn., III. o. t.),
Frankó Ferenc (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. A súrlódási határszög a feladatban adott $\mu = 0{,}14$ súrlódási együttható érték esetén $7^\circ\ 58'$, kisebb, mint a lejtő hajlásszöge. A lejtőre helyezett deszka tehát lecsúszna róla. Amíg azonban a henger gördül a deszkán, a deszka nyugalomban marad.

Ha a deszka nyugalomban marad és a henger tisztán gördül, akkor a következő összefüggéseknek kell teljesülniük:

$$S_1 \leqq \mu m_1 g \cos\alpha, \qquad S_2 \leqq \mu(m_1+m_2) g \cos\alpha, \qquad a_2 = 0, \qquad a_1 = r\beta.$$

Ezek, valamint az (1), (2), (3), (4), (5) mozgásegyenletek felhasználásával tg α-ra a következő megszorítást kapjuk:

$$\operatorname{tg}\alpha \leqq \mu \frac{m_1+m_2}{\dfrac{m_1}{1+\dfrac{m_1 r^2}{\theta}}+m_2},$$

azaz a $7^\circ\ 58' < \alpha < 10^\circ\ 15'$ szögtartományban lehetséges az, hogy a deszka nem csúszik meg mindaddig, amíg a henger rajta gördül. Könnyen belátható, hogy az egész szögtartományban valóban ez történik. Ha a lejtő hajlásszöge $7^\circ\ 58'$-nél kisebb, a deszka önmagában sem csúszik meg, ha pedig $10^\circ\ 15'$-nél nagyobb, a rajta gördülő henger ellenére is megcsúszik.

Karlócai Péter (Bp., Piarista Gimn., III. o. t.)
Végh Endre (Bonyhád, Petőfi S. Gimn., III. o. t.)