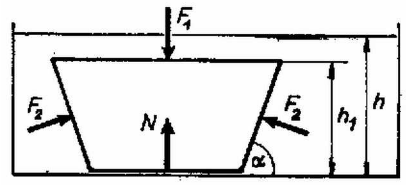
I. megoldás. A kád aljához simuló hasáb alsó lapjára a kád aljának nyomóereje (N) hat, a többi lapra a hidrosztatikai nyomóerő (1. ábra).



1. ábra

Egyensúly esetén a hasábra ható erők eredőjének nullának kell lennie. A felső lapra ható nyomóerő nagysága (p_0 a külső légnyomás, h a folyadék teljes magassága):

$$F_1 = \left[(h - f_1)\varrho g + p_0\right] a \cdot d.$$

A trapéz alakú lapokra ható nyomóerők eredője nulla. A még fennmaradó két F_2 nagyságú erőnek csak a függőleges komponensét kell figyelembe vennünk. A nyomás a mélységgel lineárisan változik, ezért az átlagmélységgel számolhatunk:

$$F_2 = \left[\left(h - \frac{h_1}{2}\right)\varrho g + p_0\right] cd,$$

ahol c a trapéz nem párhuzamos oldalainak hossza

$$\left(\cos\alpha = \frac{a-b}{2c}\right).$$

Az egyensúly feltétele:

$$2F_2\cos\alpha + N - F_1 = 0.$$

A N nyomóerő nem lehet negatív, így egyensúlyban

(1) $$F_1 - 2F_2\cos\alpha \geq 0.$$

Behelyettesítve a F_1 és F_2 kifejezéseket, h-ra a következőket kapjuk:

(2) $$h \geq \frac{a+b}{2b}h_1 - \frac{p_0}{\varrho g}, \quad (h \geq h_1).$$

Ha h teljesíti a (2) feltételt, a hasáb lenn marad a kád alján, ha

$$h_1 \leq h < \frac{a+b}{2b}h_1 - \frac{p_0}{\varrho g}$$

a hasáb felemelkedik.

Eddig csak azt az esetet vizsgáltuk, amikor a folyadék teljesen ellepi a testet, azaz amikor $h \geq h_1$. Ha a folyadék nem lepi el a testet, a F_1 és F_2 erőket adó kifejezések a következőképpen módosulnak:

$$F_1 = p_0 ad,$$
$$F_2 = \left(\frac{h}{2}\varrho g + p_0\right)c\frac{h}{h_1}d + p_0 c\frac{h_1 - h}{h_1}d.$$

Behelyettesítve az (1) feltételbe:

(3) $$h \leq \sqrt{2h_1\frac{b}{a-b}\cdot\frac{p_0}{\varrho g}}, \qquad (h \leq h_1).$$

Tehát a hasáb akkor marad a kád alján, ha a (2) vagy a (3) feltételek teljesülnek, másképpen kifejezve akkor, ha

$$h \geq h_2 \qquad \text{vagy} \qquad h \leq h_3,$$

ahol

$$h_2 = \max\left(\frac{a+b}{2b}h_1 - \frac{p_0}{\varrho g},\ h_1\right),$$
$$h_3 = \min\left(\sqrt{2h_1\frac{b}{a-b}\frac{p_0}{\varrho g}},\ h_1\right).$$

($X=\max\,(A,\,B)$ azt jelenti, hogy X az A és B mennyiségek közül a nagyobbikkal egyenlő, $Y=\min\,(A,\,B)$ azt jelenti, hogy Y az A és B mennyiségek közül a kisebbikkel egyenlő.)

Továbbá a hasáb akkor emelkedik fel, ha

$$h_3<h<h_2.$$

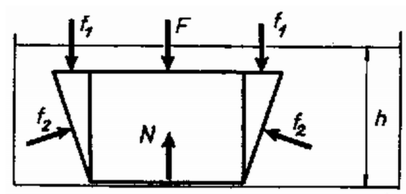
Ebből következik, hogy a test egyáltalán nem emelkedik fel akkor, ha

$$\frac{a+b}{2b}\,h_1-\frac{p_0}{\varrho g}<h_1<\sqrt{2\frac{p_0}{\varrho g}\frac{b}{a-b}\,h_1},$$

hiszen ekkor

$$h_2=h_3=h_1.$$

II. megoldás. Osszuk a hasábot gondolatban három részre a 2. ábra szerint.



2. ábra

A két szélső háromszög alapú hasábra ható f_1 és f_2 nyomóerők eredőjének függőleges komponense (f) éppen az Arkhimédész törvényéből számított felhajtóerő, mivel a hiányzó nyomóerő vízszintes. (A háromszög alapú hasáb a vágás függőleges felülete mentén ugyanis nem érintkezik folyadékkal.) Tehát

$$f=\frac{1}{2}\frac{a-b}{2}\,h_1d\cdot\varrho\cdot g.$$

A maradék hasábra ható függőleges erők a N nyomóerő és a F hidrosztatikai nyomóerő:

$$F=\big[(h-h_1)\varrho\,g+p_0\big]b\cdot d.$$

Az egyensúly feltétele

$$2f-F+N=0$$

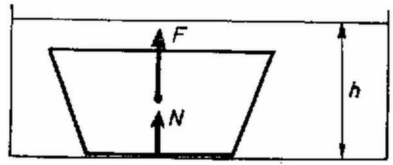
azonos az I. megoldás egyensúlyi feltételével.

Ha $h\geq h_1$, az erők:

$$f=\frac{1}{2}\frac{a-b}{2}\frac{h}{h_1}\,hd\cdot\varrho g,$$
$$F=p_0\cdot bd.$$

Az egyensúly feltételébe behelyettesítve most is a első megoldással azonos eredményt kapunk. A megoldás további menete azonos az I. megoldáséval.

III. megoldás. A hasábra ható erők (3. ábra): a N nyomóerő és a folyadék felhajtóereje, kivonva belőle az edény aljára ható hidrosztatikai nyomóerőt:



3. ábra

$$F=V\,\varrho g-A\,(h\varrho g+p_0),$$

ahol V a test térfogata, A az alaplap területe.

Az egyensúly feltétele

$$V\,\varrho g-A\,(h\varrho g+p_0)+N=0.$$

Annak feltétele, hogy a test lent maradjon az edény alján ($N \geq 0$):

$$V\,\varrho g - A\,(h\varrho g + p_0) \leq 0.$$

A térfogat és az alapterület értékét beírva ismét megkapjuk az I. megoldás eredményét.

Ha a folyadék nem lepi el teljesen a testet ($h \leq h_1$), V helyébe az elmerült térfogat kerül:

$$V_h = \left(b + \frac{a-b}{2} \cdot \frac{h}{h_1}\right) h \cdot d.$$

Ezt behelyettesítve ismét az I. megoldásból ismert eredményt kapjuk.

Megjegyzés. A megoldók többsége nem vette figyelembe a külső légnyomást. Az ilyen dolgozatok csak 2 pontot kaphattak.