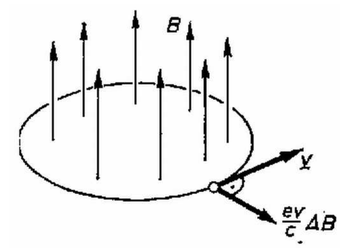
Az elektron a mágneses tér bekapcsolása előtt v kerületi sebességgel r sugarú körgályán kering. A mozgásegyenlet:

$$mv^2/r = ke^2/r^2. \tag{1}$$

(MKSA mértékegységrendszert használunk.) A mágneses tér bekapcsolása után a pályasugár Δr-rel, a sebesség Δv-vel növekszik meg. Ha ΔB elegendően kicsiny, akkor várható, hogy Δr és Δv is olyan kis mennyiségek, hogy a négyzetük már elhanyagolható.



Amennyiben a mágneses tér az 1. ábrán látható irányú, úgy a Lorentz-erő ellentétes a Coulomb-erővel és az új mozgásegyenlet:

$$\frac{m(v+\Delta v)^2}{r+\Delta r} = k\frac{e^2}{(r+\Delta r^2)} - e(v+\Delta v)\Delta B. \tag{2}$$

A másodrendűen kicsiny mennyiségek elhanyagolásával

$$\frac{1}{r+\Delta r} \quad \text{helyett} \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\Delta r$$

írható, és az (1) egyenlet figyelembevételével (2) a következő alakra hozható:

$$\frac{2mv\Delta v}{r} + \frac{ke^2}{r^3}\Delta r = -ev\Delta B. \tag{3}$$

Mivel Δr és Δv egyaránt ismeretlen, a fenti egyenlet még nem elegendő a kialakult viszonyok egyértelmű meghatározására. További összefüggést az indukciótörvényből kaphatunk. Ha a ΔB mágneses indukciójú teret t idő alatt hoztuk létre, akkor az elektron pályájára helyezett r sugarú vezetőben

$$U = -\frac{\Delta B r^2 \pi}{t}$$

feszültség indukálódik. Az elektron valahányszor körbefutja a körpályát, mindig eU energiára tesz szert. Mivel t idő alatt $vt/2r\pi$-szer fordul körbe, energiájának megváltozása

$$\Delta W = -\frac{evr}{2}\Delta B.$$

Mivel a teljes energia a mozgási és a $-k\dfrac{e^2}{r}$ helyzeti energia összege, azért

$$\frac{1}{2}m(v+\Delta v)^2 - k\frac{e^2}{r+\Delta r} - \left(\frac{1}{2}mv^2 - k\frac{e^2}{r}\right) = -\frac{evr}{2}\Delta B.$$

Ismét elhanyagolva a másodrendűen kicsiny mennyiségeket

$$mv\Delta v + k\frac{e^2}{r^2}\Delta r = -\frac{evr}{2}\Delta B \tag{4}$$

adódik. (3) és (4) egyenletek már meghatározzák Δr és Δv értékét. A lineáris egyenletrendszer megoldása

$$\Delta r = 0 \quad \text{és} \quad \Delta v = -\frac{er}{2m}\Delta B.$$

A közelítés addig jogos, amíg $|\Delta v| \ll v$, vagyis

$$|\Delta B| \ll \frac{2mv}{er} = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{km}{r}}.$$

(1) felhasználásával és a hidrogénatom numerikus adataival ($m = 9 \cdot 10^{-28}$ g, $r = 5{,}3 \cdot 10^{-9}$ cm)

$$|\Delta B| \ll 5 \cdot 10^5\,\mathrm{Vs/m^2}$$

adódik.

Megjegyzések. 1. A megoldás során felhasználtuk, hogy a módosított pálya szintén kör. Általában ez nem igaz, lehetséges ellipszispálya is. Ha azonban a mágneses teret lassan kapcsoljuk be (vagyis t idő alatt az elektron sokszor teszi meg a körpályát), akkor a módosító erő egyforma hosszú ideig hat mindegyik irányba és szimmetria okokból az új pálya csak kör lehet.

2. Az indukált feszültséget $\Delta B/t$-vel arányosnak vettük, vagyis feltételeztük, hogy $B(t)$ időben lineárisan változik. Ha ez nem teljesül, akkor is érvényes a közölt megoldás, csak akkor a teljes t időtartamot kisebb intervallumokra kell felosztanunk (akkorákra, hogy ezekhez B változása egyenletesnek tekinthető legyen).

3. A fizikában nagyon gyakran elhanyagoljuk kis mennyiségek magasabb hatványait („egyenletek linearizálása"). Ez nagyon leegyszerűsíti a számításokat, de nem alkalmazható olyan esetekben, amikor az effektus lényege a nem lineáris tagokból származik.

Grundig Péter és *Woynarovich Ferenc*