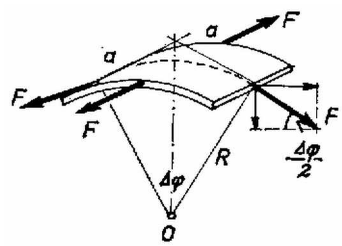
a) A szervezet vérkeringésében a szívnek fizikai szempontból az a feladata, hogy összehúzódása (ill. elernyedése) révén az erekbe vért pumpáljon. Két egyenlő térfogatú szív közül az tekinthető gazdaságosabbnak, amelynek egységnyi térfogatváltozásához a szívizmok kisebb rugalmassági energiabefektetése szükséges. Az első esetben modellezzük a szívet egy r sugarú és h magasságú hengerrel, a második esetben pedig egy R sugarú gömbbel. Mindkét esetben E rugalmassági modulusúnak és $d(\ll r,\ R)$ vastagságúnak tekintjük a szívfalat. A két szívtérfogat legyen egyenlő.



(1) $$r^2\pi h = (4/3)R^3\pi.$$

Ha a henger sugara Δr-rel megváltozik, akkor $\Delta V_h = 2r\pi h\cdot\Delta r$ térfogatváltozás lép fel, a gömbnél pedig a ΔR sugárváltozás $\Delta V_g = 4R^2\pi\cdot\Delta R$ térfogatváltozást eredményez. A fentiek értelmében legyen

$$\Delta V_h = \Delta V_g,$$

(2) $$\text{azaz}\quad 2r\pi h\cdot\Delta r = 4R^2\pi\cdot\Delta R.$$

Számítsuk ki, hogy ezekhez az egyenlő térfogatváltozásokhoz mennyi rugalmassági energia szükséges. Ismeretes, hogy egy E rugalmasságú modulusú, hosszúkás rúd a relatív hosszváltozásához $W = (1/2)E\varepsilon^2$ energia szükséges térfogategységenként. Alkalmazzuk ezt az esetet közelítésként a kétféle szívre.

A henger alakú szíven végzett deformációs munka:

(3) $$W_h = 2r\pi hd\cdot(1/2)E\varepsilon_h^2 = r\pi hdE(\Delta r/r)^2.$$

A gömb alakú szív deformációs munkája:

(4) $$W_g = 4R^2\pi d\cdot(1/2)E\varepsilon_g^2 = 2R^2\pi dE(\Delta R/R)^2.$$

Fejezzük ki a két munka arányát:

(5) $$\frac{W_g}{W_h} = \frac{2R^2\left(\dfrac{\Delta R}{R}\right)^2}{rh\left(\dfrac{\Delta r}{r}\right)^2} = \frac{2r}{h}\left(\frac{\Delta R}{\Delta r}\right)^2.$$

Fejezzük ki (2)-ből a $\Delta R/\Delta r$ hányadost, valamint (1)-ből a R sugarat, és helyettesítsük be ezeket az (5) egyenletbe! Rendezés után a deformációs munkák hányadosára ezt kapjuk:

(6) $$\frac{W_g}{W_h} = \frac{2}{3}\left(\frac{4r}{3h}\right)^{1/3}.$$

Ugyanazon térfogatváltozáshoz a gömb alakú szívnél akkor kell kisebb deformációs munkavégzés, ha $W_g < W_h$, azaz

(7) $$\frac{2}{3}\left(\frac{4r}{3h}\right)^{1/3} < 1.$$

Ez a

(8) $$h > (16/27)r$$

feltétel teljesülését igényli. Mivel ez a kikötés reális mérlegelés esetén általában mindig teljesül, ezért a gömb alakú szív „gazdaságosabbnak” tekinthető, mint egy erősen hengerszerű.

b) Ha a szívben sugárirányú rostok találhatók, akkor a szív az összehúzódás szempontjából olyan gömbbel modellezhető, amelyben a középpontból kiinduló gumiszálak a felülethez tapadnak. Legyen a gömb sugara R, az egységnyi felülethez tapadó szálak száma n, a szálak keresztmetszete q, Young modulusa E. A $\Delta r_1/R$ relatív sugárváltozás

(9) $$W_1 = n\cdot 4R^2\pi\cdot qR\cdot(1/2)E(\Delta r_1/R)^2 = 2R\pi nqE(\Delta r_1)^2$$

alakváltozási munka révén jön létre, és ez a gömb belsejében

$$\Delta p_1 = nq\sigma = nqE\Delta r_1/R \tag{10}$$

nyomásnövekedést eredményez.

Ha az összehúzó izomrostok a felületen helyezkednek el, akkor modellül egy gumi ballon szolgál. Válasszuk ki a felület egy $a \cdot a$ négyzet alakú darabját. Mindegyik oldalra érintőlegesen

$$F = adE\Delta r_2/R \tag{11}$$

erő hat, ahol Δr_2 a deformáció hatására bekövetkező sugárváltozás. Ha $\Delta\varphi$-ve1 jelöljük a középponti szöget, akkor a így fejezhető ki:

$$a = (R - \Delta r_2)\Delta\varphi. \tag{12}$$

A Δp_2 nyomáskülönbséget a felületi erők hozzák létre:

$$\Delta p_2 \cdot a^2 = 4F\,\sin(\Delta\varphi/2).$$

Kis $\Delta\varphi$ esetén a szög szinusza a szög radiánban vett értékével közelíthető:

$$\Delta p_2 = (2F/a^2) \cdot \Delta\varphi. \tag{13}$$

Helyettesítsük (13)-ba (11)-et és (12)-t! Rendezés után, valamint az $R \gg \Delta r_2$ feltétel figyelembevételével

$$\Delta p_2 = \frac{2Ed}{R^2}\Delta r_2 \tag{14}$$

adódik. A Δr_2 sugárváltozáshoz

$$W_2 = 4R^2\pi d \cdot (1/2)E\left(\frac{\Delta r_2}{R}\right)^2 = 2E\pi d \cdot (\Delta r_2)^2 \tag{15}$$

alakváltozási munka tartozik.

A két eset közül az a kedvezőbb, amelyiknél ugyanolyan hatásos térfogatváltozás és a létesített nyomáskülönbségek egyenlősége mellett kisebb a deformációs munka:

$$\Delta p_1 = \Delta p_2,$$
$$nqE\frac{\Delta r_1}{R} = \frac{2Ed}{R^2}\Delta r_2.$$

Innen

$$d = \frac{nRq}{2} \cdot \frac{\Delta r_1}{\Delta r_2}. \tag{16}$$

d most kapott értékét írjuk be (15)-be:

$$W_2 = E\pi nRq(\Delta r_1)(\Delta r_2). \tag{17}$$

Képezzük a két munkavégzés hányadosát:

$$W_1/W_2 = 2(\Delta r_1/\Delta r_2).$$

Ez az arány általában nagyobb egynél, ugyanis az első esetben nagyobb sugárváltozás hozza létre ugyanazt a hatásos térfogatváltozást, mint ami Δr_2-höz tartozik, mivel az első esetben az izomrostok a gömb belsejében vannak. Tehát a felületi izomrostok kialakulása a hatásos térfogat növekedését és ezáltal a „gazdaságosabb” üzemelést jelenti.

Surján Péter dolgozata alapján