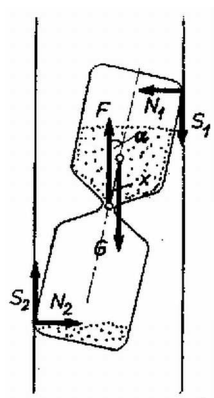
Az üvegcső megfordításakor a homok a homokóra felső részében helyezkedik el. Az óra súlypontja szintén a felső részben van. A metacentrum (az egész test víz alatt van) egybeesik a felhajtóerő támadáspontjával, a geometriai középpontban van. Mivel a metacentrum a súlypont alatt van, a homokóra egyensúlyi helyzete instabil, a súlyerő és a felhajtóerő forgatónyomatékainak különbsége elforgatja a homokórát. Ezt a forgatónyomatékot a homokóra és az üvegcső érintkezési pontjainál fellépő nyomóerők egyenlítik ki. A nyomóerők következtében fellépő súrlódási erők (amelyek természetesen a nyomatéki egyensúlyhoz is hozzájárulnak) megakadályozzák az elmozdulást. A homok egyenletesen lefolyik az alsó részbe, közben a súlypont közeledik a metacentrumhoz. A nyomóerők a nyomatéki egyenletnek megfelelően csökkennek, és mivel a súrlódási erő nem lehet nagyobb a nyomóerő súrlódási együtthatószorosánál, még mielőtt a súlypont eléri a metacentrumot, a homokóra elindul felfelé.

Biczók László (Szeged, Radnóti M. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A feladatmegoldók többsége sikerrel készítette el az eszközt, amely csak akkor működik, ha a felhajtóerő és a súlyerő különbsége elég kicsi. A különbséget legegyszerűbben a homokóra közepére csavart fémdróttal lehet a megfelelő értékre beállítani. (Az OFOTÉRT boltokban 7 Ft-ért a célnak ideálisan megfelelő homokóra kapható.) Több megoldó kísérletileg is ellenőrizte a gondolatmenetet: ha a súlypontot mesterségesen a metacentrum alá visszük úgy, hogy a drótot nem középre, hanem az alsó hengerre tekerjük rá, a homokóra rögtön elindul felfelé várakozás nélkül.

2. A megoldók közöl senki sem utalt arra, hogy ha a homokóra átlagos sűrűsége nem kisebb, hanem egy kicsit nagyobb, mint a vízé, a szerkezet hasonlóan működik. Ilyenkor a homokóra fent várakozik, és egyensúlyi helyzete lent van.

3. A megoldásban közölt gondolatmenetet számolással is követhetjük. Vezessük be a következő jelöléseket. A homokóra súlya G, a felhajtóerő F. A nyomóerők jele legyen N_1 és N_2, a súrlódási erőké S_1 és S_2. Legyen a homokóra magassága l, a függőlegessel bezárt szöge α, a súlypont és a geometriai középpont távolsága x.



Az erők és a középpontra vonatkoztatott forgatónyomatékok egyensúlyának egyenletei:

$$S_1 + S_2 + G - F = 0,$$
$$N_1 - N_2 = 0,$$
$$N_1(l/2)\cos\alpha + N_2(l/2)\cos\alpha + S_2(l/2)\sin\alpha - S_1(l/2)\sin\alpha - Gx\sin\alpha = 0.$$

Ha a homokóra a súrlódási erők miatt nyugalomban marad, az $S_1 \le \mu N_1$ és $S_2 \le \mu N_2$ egyenlőtlenségek érvényesek. Határesetben, amikor éppen elindul fölfelé, az

$$S_1 = \mu N_1, \qquad S_2 = \mu N_2$$

egyenletek segítségével kiszámíthatjuk az ötismeretlenes egyenletrendszerből x értékét:

$$x = \frac{l}{2\mu}\frac{F-G}{G\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Ha a súlypont és a középpont távolsága elérte az x értéket, a homokóra elindul felfelé. Most kiszámítjuk, hogy mennyi idő szükséges ehhez a fordítás után. Legyen a homok súlya G_1, az üveg és a nehezék együttes súlya G_0($G = G_0 + G_1$). A homok egyensúlyi esetben d magasságú hengert képez. Ha a homokóra lecsurgási ideje T, t $(< T)$ idővel az indulás után az alsó hengerben dt/T magasságú és $G_1 t/T$ súlyú, a felsőben $d(1-t/T)$ magasságú és $G_1(1-t/T)$ súlyú homok van. Az alsó homok súlypontja a homokóra közepétől $l/2 - (1/2)\,dt/T$ távolságra, a felsőé $(1/2)d(1-t/T)$ távolságra van. Így az x távolságot az

$$\frac{1}{2}d\left(1-\frac{t}{T}\right)\cdot G_1\left(1-\frac{t}{T}\right) - \left(\frac{l}{2}-\frac{1}{2}d\frac{t}{T}\right)\cdot G_1\frac{t}{T} = x(G_0+G_1)$$

nyomatéki egyenletből kaphatjuk meg. Innen

$$t=T\frac{(2d+l)-\sqrt{(2d+l)^2-8d(d-2xG/G_1)}}{4d}.$$

(A másodfokú egyenlet másik gyökéből $t>T$ adódna, így az fizikailag nem megoldás.) x értékét behelyettesítve, az indulás ideje

$$t=T\frac{(2d+l)-\sqrt{(2d+l)^2-8d^2+8ld\dfrac{F-G}{\mu G_1\operatorname{tg}\alpha}}}{4d}.$$

Eredményünk természetesen csak hozzávetőleges, ugyanis elhanyagoltuk a súlypont meghatározásánál azt, hogy a „homokhengerek” alap- és fedőlapja nem sík.

4. A hibás dolgozatok nagy része a homokóra súlycsökkenésével, illetve impulzustétellel magyarázta a jelenséget. A homokóra súlya csak abban az esetben csökkenhet, ha súlypontja *gyorsul* lefelé, ez pedig csak az első pillanatban teljesül, később már a súlypont egyenletes sebességgel mozog.