A feladatot legkönnyebben az energiamegmaradás tétele segítségével oldhatjuk meg. Először azt kell meghatároznunk, hogy mennyivel változik meg két – egyaránt e töltésű – test potenciális energiája, ha r-től R-re növekszik távolságuk. Mivel a köztük ható Coulomb-erő x távolságnál

$$f(x) = ke^2/x^2,$$

ezért az energiaváltozás – amely a végzett munkával egyenlő:

$$W = \int_r^R f(x)\,\mathrm{d}x = ke^2 \int_r^R (1/x^2)\mathrm{d}x = ke^2(1/r - 1/R).$$

Ha a testek nagyon messze kerülnek egymástól ($R \gg r$), akkor $1/R$ elhanyagolható $1/r$ mellett, és így a potenciális energia megváltozása ke^2/r.

Ha a fenti levezetést közvetlenül alkalmazzuk feladatunkra, akkor csak annyit állíthatunk, hogy a négy töltés kezdeti

$$4ke^2/a + 2ke^2/\sqrt{2}a$$

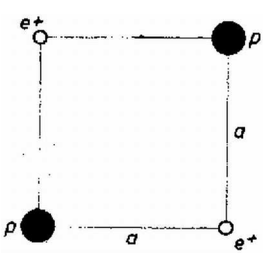
potenciális energiája megegyezik a mozgási energiájukkal, mikor már nagyon eltávolodnak egymástól. Ha v-vel jelöljük a pozitronok, u-val pedig a protonok sebességét a végtelenben, akkor a

$$\frac{ke^2}{a}(4+\sqrt{2}) = 2\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2\right)$$

összefüggés csak a mozgási energiák összegét adja meg, de nem mondja meg, hogy milyen arányban osztoznak az egyes részecskék ebből az energiából.

Használjuk ki, hogy a proton tömege sokkal nagyobb a pozitron tömegénél ($M \gg m$)! Mivel kezdetben azonos erők hatnak valamennyi részecskére, ezért a protonok kb. 2000-szer kisebb gyorsulással mozognak, mint a pozitronok. Van egy olyan időpont, amikor a pozitronok már lényegesen eltávolodtak egymástól ($r \gg a$), de a protonok még alig mozdultak meg ($\Delta s \ll a$). Hogy a nagyságrendeket – és így a közelítés pontosságát – megbecsülhessük, tételezzük fel egy pillanatra, hogy a testek a kezdeti gyorsulással mozognak egy ideig (természetesen ez nem igaz, hiszen ahogy távolodnak, a köztük ható erő csökken, de a nagyságrendi becslést ez nem rontja el). Ekkor az azonos idők alatt a megtett utak a tömegekkel fordítottan arányosak. Mialatt a pozitronok $50a$ utat tesznek meg, azalatt a protonok ennek csak 1/2000-szeresét, vagyis $(1/40)$ a-t. Az $50a$ elég nagy ahhoz, hogy a-hoz képest „végtelen”-nek tekintsük (legalább 10 % pontosságig), az $(1/40)a$ pedig elég kicsi ahhoz, hogy a mellett elhanyagoljuk, vagyis úgy vegyük, mintha a proton meg sem mozdult volna (megint csak 10 %-nál kisebb hibát vétünk). Ha tovább várunk, a pozitronok lényegében változatlan sebességgel repülnek tovább, a protonok pedig lassan megindulnak, de mozgásuk a pozitronokra már egyáltalán nincs hatással.

A tényleges számításban két esetet kell megkülönböztetnünk.



1. ábra

Ha az egyforma típusú részecskék a négyzet átlói mentén helyezkednek el (1. ábra), akkor az energiatétel a két egymásutáni lépésben:

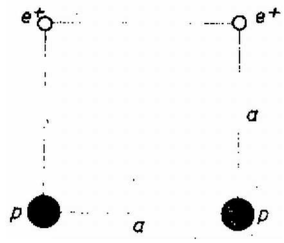
$$4ke^2/a + ke^2/\sqrt{2}a = 2\cdot(1/2)mv^2,$$
$$ke^2/\sqrt{2}a = 2\cdot(1/2)Mu^2$$

alakú, ahonnan

$$v = \sqrt{\frac{ke^2}{2ma}(4\sqrt{2}+1)} \quad \text{és } u = \sqrt{\frac{ke^2}{2Ma}}.$$

A sebességek aránya:

$$\frac{u}{v} = \sqrt{\frac{m}{M}\frac{1}{4\sqrt{2}+1}} \approx 0{,}007.$$



2. ábra

Amennyiben a protonok kezdetben a négyzet azonos oldalélének végpontjain voltak (2. ábra), úgy a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$3k\frac{e^2}{a}+2\frac{e^2}{\sqrt{2}a}=2\frac{1}{2}mv^2,$$
$$k\frac{e^2}{a}=2\cdot\frac{1}{2}Mu^2,$$

ahonnan

$$\frac{u}{v}=\sqrt{\frac{m}{M}\frac{1}{3+\sqrt{2}}}\approx 0{,}01.$$

Meszéna Géza (Bp., Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A legtöbb versenyző azt a hibás feltevést tette, hogy a protonok és pozitronok egyenlő arányban osztozkodnak a kezdeti potenciális energián és így a sebességek arányára $\sqrt{m/M}\approx 0{,}02$ értéket kaptak. Ezt a feltevést csak valamilyen részecskénként érvényes energiatétellel lehetne alátámasztani, ilyen viszont nem létezik. Az energiamegmaradás tétele csak a rendszer teljes energiájára ad összefüggéseket.