Az m tömegű, v_1 sebességű zsák beleesik az m tömegű, v sebességű ládába. A τ ideig tartó rugalmatlan ütközési folyamat során a zsák elveszti lejtőre merőleges impulzusát, s ezután a két test azonos u sebességgel halad tovább. Célunk ennek az u sebességnek a kiszámítása.

Az ütközés előtti v és v_1 sebességek nem függetlenek egymástól, mivel a két testet egyszerre indítottuk útnak.

$$v_1 = gt, \qquad v = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t.$$

A t időt kiküszöbölve

$$v = v_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha). \tag{1}$$

A zsákból és a dobozból álló rendszer nem zárt, mivel a testekre külső erők is hatnak: a nehézségi erő, a lejtőre merőleges K erő és a lejtővel párhuzamos $\mu\ K$ nagyságú súrlódási erő. A mechanika általános törvénye, hogy egy rendszer összimpulzusának ($\mathbf{I}$) megváltozása egyenlő a külső erők ($\mathbf{F}$) egymás utáni „erőlökés”-einek ($\mathbf{F}\cdot\Delta t$) összegével (l. az 1108. feladat megoldását):

$$\Delta\mathbf{I} = \int_{t_2}^{t_1} \mathbf{F}\mathrm{d}t \approx \sum \mathbf{F}\Delta t. \tag{2}$$

Ez a törvény speciális esetként tartalmazza az impulzusmegmaradás törvényét is ($\mathbf{F} = 0$).

Az impulzus és az erő vektormennyiség, ezért a (2) egyenletet a lejtőre merőleges és a lejtővel párhuzamos komponensekre egyaránt föl kell írni. A lejtőre merőleges impulzus megváltozása az ütközés alatt (a K erő irányát vettük pozitívnak):

$$mv_1\cos\alpha = \int_0^\tau K\,\mathrm{d}t - 2\mathrm{mg}(\cos\alpha)\tau. \tag{3}$$

A lejtővel párhuzamos irányban

$$2mu - m(v + v_1\sin\alpha) = 2mg(\sin\alpha)\tau - \mu\int_0^\tau K\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

A felírásnál kihasználtuk, hogy egy állandó erő erőlökése az eltelt idővel (τ) arányos. Ha a (3) egyenletet μ-vel szorozva a (4) egyenlethez hozzáadjuk, kiküszöbölhetjük a K kényszererőt:

$$2mu - m[v + v_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)] - 2mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\tau.$$

Figyelembe véve a v és v_1 közötti (1) összefüggést:

$$u - v = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\tau.$$

Eredményünk független attól, hogy az ütközés részletei valójában lassan játszódtak le. A testek az ütközés után ugyanakkora sebességgel haladnak, mint amekkorával a láda haladt volna, ha nem esik bele a zsák. Természetesen ez a kezdeti feltételeken is múlott. Ha a láda és a zsák nem egyszerre indul, a sebességváltozást meghatározó (5) egyenletet nem tudjuk ilyen egyszerű alakra hozni.

Az ütközések tárgyalásánál gyakran föltételezzük, hogy az ütközés pillanatszerű, azaz az ütközési idő minden megfigyelt időtartamnál jóval rövidebb. Ekkor a végeredményben τ helyére nullát írhatunk, s így

$$u - v \approx 0.$$

Az eredmény nem változik, ha a láda és a zsák tömege különbözik.

Prőhle Péter (Bp., Fazekas M. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Mivel az eredmény nem függ az ütközés részleteitől, nyugodtan dolgozhattunk volna átlagos erőkkel is. Ekkor pl. a (3) egyenletet így írjuk:

$$mv_1\cos\alpha = [\overline{K} - 2mg\cos\alpha]\tau.$$

2. Tekintettel arra, hogy csak kevés helyes megoldás érkezett be, összefoglaljuk, amit az ütközések impulzusviszonyairól tudni kell.

Ha az ütköző testekre külső erő nem hat, azaz a testek zárt rendszert alkotnak, akkor a rendszer összes impulzusa az ütközés során nem változik.

Ha külső erők is hatnak, akkor az összes impulzus nem állandó. Amennyiben föltesszük, hogy az ütközés rövid ideig tart, az ütközés leírása továbbra is egyszerű, hiszen a külső erők erőlökéseit elhanyagolhatjuk a belső erőké mellett. Pillanatszerű ütközésről beszélünk ilyenkor, és az ütközés pillanatában az impulzusmegmaradás összefüggését használhatjuk.

Ha az ütközés során külső erő is támad, mint az 1108. és a jelen feladatban is, akkor az impulzusmegmaradásnál általánosabb (2) impulzustörvényt kell fölírnunk. Az 1108. feladatban a lejtőre merőleges kényszererő növekedett meg az ütközés miatt. A lejtővel párhuzamosan ez nem befolyásolja az ütközést, ezért használhattuk az impulzusmegmaradás törvényét. A jelen feladatban a kényszererővel együtt a lejtővel párhuzamos súrlódási erő is megnövekedett, ezért mindkét irányban a (2) impulzustörvényt kellett használnunk.

Szándékosan olyan megoldást választottunk a beérkezettek közül, amelyben az ütközési időt véges értékűnek tekintette a megoldó. Így jobban látszik, hogy az ütközéstől függetlenül is ható erők erőlökése az ütközési idővel arányos (azaz $\tau = 0$ esetén eltűnik), míg ezt az ütközés miatt ébredő erőkről nem mondhatjuk: ezek annál nagyobbak, minél rövidebb idő alatt zajlik le az ütközés.