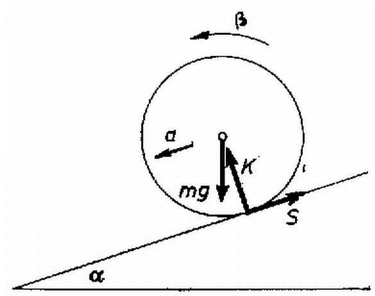
Vizsgáljuk meg egy α hajlásszögű lejtőre helyezett m tömegű, r sugarú golyó mozgását, ha a súrlódási együttható μ. Jelöljük a golyó súlypontjának gyorsulását a-val, szöggyorsulását β-val és a tehetetlenségi nyomatékot Θ-val! A golyóra ható erőket vegyük fel az 1. ábrán látható módon!



1. ábra

Két esetet kell megkülönböztetnünk. Ha a súrlódási együttható nem túl nagy, akkor a golyó gördül is és csúszik is a lejtőn. Ilyenkor a haladó- és forgómozgás egyenletei:

(1) $$mg\sin\,\alpha - S = ma,$$

(2) $$K - mg\,\cos\,\alpha = 0,$$

(3) $$Sr = \Theta\beta.$$

A súrlódási erő csúszó felületek között

$$S = \mu K.$$

Az egyenletrendszer megoldása $\Theta = (2/5)mr^2$ felhasználásával

(4) $$a = g(\sin\,\alpha - \mu\,\cos\,\alpha),$$

(5) $$\beta = \frac{5\cdot\mu\cdot g\cdot\cos\,\alpha}{2r}$$

Ez a megoldás csak akkor lehet helyes, ha a golyó forgásából származó kerületi gyorsulás nem nagyobb a haladó mozgás gyorsulásánál. (Ellenkező esetben a súrlódó felületek relatív elmozdulása ellentétes irányú lenne, és ilyenkor a súrlódási erő sem az ábrán felvett irányba mutatna.) A (4) és (5) megoldások felhasználásával és a $g\,\sin\,\alpha - \mu g\,\cos\,\alpha \geqq (5/2)\mu g\,\cos\,\alpha$ összefüggésből μ-re a

$$\mu \leqq (2/7)\mathrm{tg}\,\alpha$$

megszorítást kapjuk.

Ha ez az egyenlőtlenség nem teljesül, akkor a golyó nem csúszik, hanem tiszta legördülést végez. Ilyenkor már nem érvényes a súrlódási erőre korábban felírt egyenlet, csupán az

$$S \leqq \mu\cdot K$$

egyenlőtlenség. Helyette viszont felhasználhatjuk, hogy a kerületi gyorsulás és a súlypont gyorsulása megegyezik, vagyis

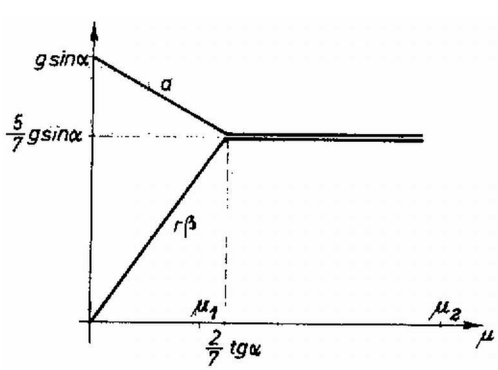
(6) $$r\beta = a.$$

Az (1), (2). és (3) összefüggések továbbra is érvényesek. Az egyenletrendszer megoldása

(7) $$a = (5/7)g\,\sin\,\alpha,$$

ami természetesen csak akkor jogos, ha $\mu \geqq (2/7)$ tg α.

Ábrázoljuk a haladó- és a forgómozgás gyorsulását a súrlódási együttható függvényében (2. ábra)!



2. ábra

Látható, hogy nagyobb súrlódási együtthatóhoz kisebb vagy legfeljebb azonos súlyponti gyorsulás tartozik. A feladatban szereplő $\alpha = 20^\circ$-nál a kritikus súrlódási együttható

$$\mu_0 = (2/7)\ \mathrm{tg}\ \alpha = 0,104,$$

vagyis az egyik golyó ($\mu_1 = 0,1$) csúszva gördül, míg a másik ($\mu_2 = 0,4$) tiszta legördüléssel mozog. Az előbbinek határozottan nagyobb a gyorsulása, így előbb ér le a lejtő aljára.

Határozzuk meg az l hosszúságú lejtő alján a golyók haladási és forgás energiáit! Mindkét golyóra az

$$E_{\text{haladási}} = (1/2)mv^2 = mal \qquad \text{és}$$
$$E_{\text{forgási}} = (1/2)\Theta\omega^2 = (1/2)\Theta\beta^2t^2$$

összefüggéseket használhatjuk, ahol $t = \sqrt{2l/a}$ a mozgás ideje. Az eltérés csupán annyi, hogy a megfelelő gyorsulásokat az egyik golyóra a (4) és (5), a másikra. pedig a (6) és (7) egyenletekből kapjuk.

a) A csúszva gördülő golyóra:

$$E_{\text{haladási}} = mgl(\sin\ \alpha - \mu_1\ \cos\ \alpha) = 4,87\ \text{J},$$
$$E_{\text{forgási}} = \frac{5}{2}\ \frac{\mu_1^2\ \cos^2\ \alpha}{\sin\ \alpha - \mu_1\ \cos\ \alpha} mgl = 1,75\ \text{J}.$$

A teljes mozgási energia $6,62$ J, a haladási és forgási energiák aránya $2,8$.

b) A csúszásmentesen gördülő golyóra:

$$E_{\text{haladási}} = (5/7)mgl\ \sin\ \alpha = 4,79\ \text{J},$$
$$E_{\text{forgási}} = (2/7)mgl\ \sin\ \alpha = 1,92\ \text{J},$$

Az energiák aránya $5/2$, a teljes mozgási energia pedig

$$E_m = mgl\ \sin\ \alpha = 6,71\ \text{J}.$$

Ez természetesen megegyezik a kezdeti potenciális energiával, hiszen csúszásmentes mozgásnál a teljes mechanikai energia nem változhat.

Fazekas Béla (Budapest, Leövey K. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A csúszó test mozgási energiáját is meg lehet határozni az energiamegmaradás tételének alkalmazásával, ha figyelembe vesszük a súrlódási erő W_S munkavégzését:

$$E_m = mgl\ \sin\ \alpha - W_S.$$

Vigyáznunk kell azonban W_S kiszámításánál. $W_S = S \cdot x$, ahol x nem a lejtő hossza, hanem annál kevesebb, hiszen a golyó csúszás közben visszafelé elfordult. A relatív elmozdulás

$$x = t - r\varphi = \frac{a}{2}\ t^2 - \frac{r\beta}{2}\ t^2 = l - lr\beta/a.$$

Bari Ferenc (Csongrád, Batsányi J. Gimn., IV. o. t.)

2. Sok versenyző arra a helytelen következtetésre jutott, hogy a második golyó el sem indul a lejtőn. A hibát ott követték el, hogy az $S = \mu K$ egyenletet használták, ez pedig – mint láttuk – nem mindig érvényes.